KAPITEL 8

Wichtige statistische Verteilungen

In diesem Kapitel werden wir die wichtigsten statistischen Verteilungsfamilien einführen. Zu diesen zählen neben der Normalverteilung die folgenden Verteilungsfamilien:

(1) Gammaverteilung (Spezialfälle: χ^2–Verteilung und Erlang–Verteilung);
(2) Student–t–Verteilung;
(3) Fisher–Snedecor–F–Verteilung.

Diese Verteilungen werden wir später für die Konstruktion von Konfidenzintervallen und statistischen Tests benötigen.

8.1. Gammafunktion und Gammaverteilung

Definition 8.1.1. Die *Gammafunktion* ist gegeben durch

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0.$$

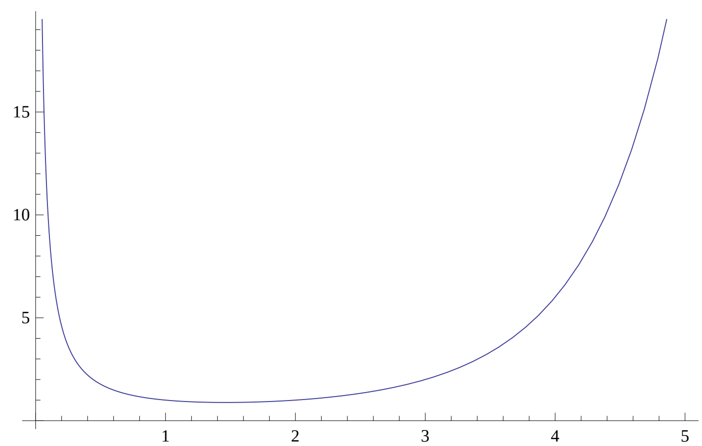

Abbildung 1. Der Graph der Gammafunktion.

Folgende Eigenschaften der Gammafunktion werden oft benutzt:

(1) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
(2) $\Gamma(n) = (n-1)!$, falls $n \in \mathbb{N}$.
(3) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Die letzte Eigenschaft kann man wie folgt beweisen: Mit $t = \frac{w^2}{2}$ und $dt = wdw$ gilt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{w} e^{-\frac{w^2}{2}} wdw = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-\frac{w^2}{2}} dw = \sqrt{\pi},$$

denn $\int_0^\infty e^{-\frac{w^2}{2}} dw = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$.

DEFINITION 8.1.2. Eine Zufallsvariable X ist *Gammaverteilt* mit Parametern $\alpha > 0$ und $\lambda > 0$, falls für die Dichte von X gilt

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

NOTATION 8.1.3. $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$.

AUFGABE 8.1.4. Zeigen Sie, dass $\int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = 1$.

BEMERKUNG 8.1.5. Die Gammaverteilung mit Parametern $\alpha = 1$ und $\lambda > 0$ hat Dichte $\lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$, und stimmt somit mit der Exponentialverteilung mit Parameter λ überein.

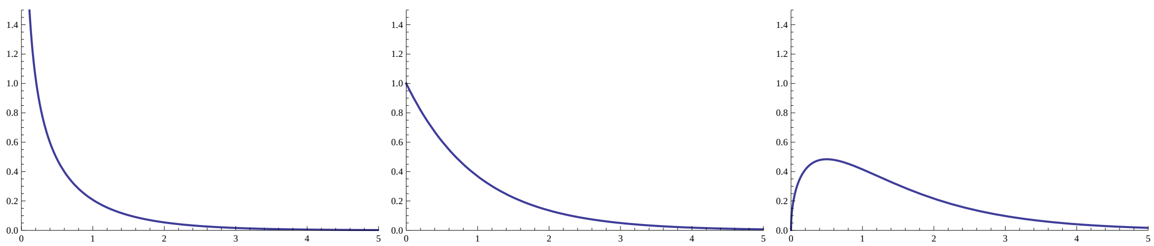

ABBILDUNG 2. Dichten der Gammaverteilungen mit verschiedenen Werten des Parameters α. Links: $\alpha < 1$. Mitte: $\alpha = 1$ (Exponentialverteilung). Rechts: $\alpha > 1$.

SATZ 8.1.6. *Sei $X \sim$ Gamma(α, λ) eine Gammaverteilte Zufallsvariable. Dann sind die Laplace–Transformierte $m_X(t) := \mathbb{E}e^{tX}$ und die charakteristische Funktion $\varphi_X(t) := \mathbb{E}e^{itX}$ gegeben durch*

$$m_X(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^\alpha} \text{ (für } t < \lambda), \quad \varphi_X(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^\alpha} \text{ (für } t \in \mathbb{R}).$$

BEWEIS. Für die Laplace–Transformierte ergibt sich

$$m_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx.$$

Dieses Integral ist für $t < \lambda$ konvergent. Indem wir nun $w = (\lambda - t)x$ einsetzen, erhalten wir, dass

$$m_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{w}{\lambda - t}\right)^{\alpha-1} e^{-w} \frac{dw}{\lambda - t} = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(\lambda - t)^\alpha} \int_0^\infty w^{\alpha-1} e^{-w} dw = \frac{1}{(1 - \frac{t}{\lambda})^\alpha}.$$

Wenn man nun komplexe Werte von t zulässt, dann sind die obigen Integrale in der Halbebene $\operatorname{Re} t < \lambda$ konvergent. Somit stellt $m_X(t)$ eine analytische Funktion in der Halbebene $\operatorname{Re} t < \lambda$ dar und ist für reelle Werte von t gleich $1/(1 - \frac{t}{\lambda})^\alpha$. Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung (Funktionentheorie) muss diese Formel in der ganzen Halbebene gelten. Indem wir nun die Formel für Zahlen der Form $t = is$ benutzen (die in der Halbebene für alle $s \in \mathbb{R}$ liegen), erhalten wir, dass

$$\varphi_X(s) = m_X(is) = \frac{1}{(1 - \frac{is}{\lambda})^\alpha}.$$

Somit ist die Formel für die charakteristische Funktion bewiesen. $\square$

Aufgabe 8.1.7. Zeigen Sie, dass für $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ gilt

$$\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \text{Var}\, X = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Der nächste Satz heißt die *Faltungseigenschaft der Gammaverteilung.*

Satz 8.1.8. *Sind die Zufallsvariablen $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ und $Y \sim \text{Gamma}(\beta, \lambda)$ unabhängig, dann gilt für die Summe*

$$X + Y \sim \text{Gamma}(\alpha + \beta, \lambda).$$

Beweis. Für die charakteristische Funktion von $X + Y$ gilt wegen der Unabhängigkeit

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = \frac{1}{(1 - \frac{it}{\lambda})^\alpha} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{it}{\lambda})^\beta} = \frac{1}{(1 - \frac{it}{\lambda})^{\alpha+\beta}}.$$

Dies ist die charakteristische Funktion einer $\text{Gamma}(\alpha + \beta, \lambda)$–Verteilung. Da die charakteristische Funktion die Verteilung eindeutig bestimmt, muss $X + Y \sim \text{Gamma}(\alpha + \beta, \lambda)$ gelten. $\square$

8.2. χ^2–Verteilung

Definition 8.2.1. Seien $X_1, \ldots, X_n \sim \text{N}(0, 1)$ unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Dann heißt die Verteilung von

$$X_1^2 + \ldots + X_n^2$$

die χ^2*–Verteilung* mit n Freiheitsgraden.

Notation 8.2.2. $X_1^2 + \ldots + X_n^2 \sim \chi_n^2$.

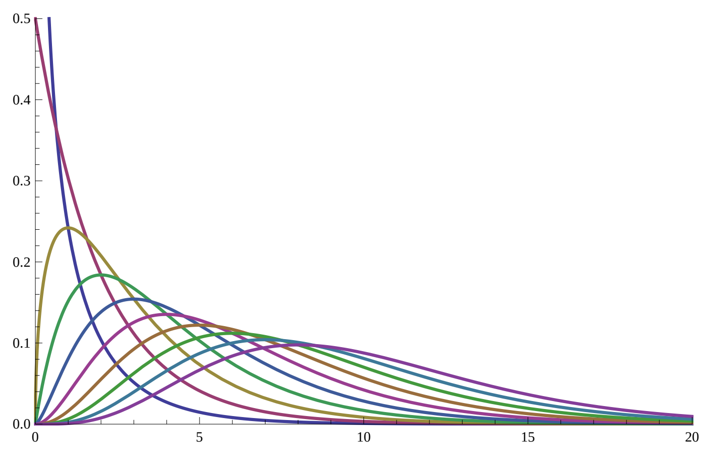

Abbildung 3. Dichten der χ^2–Verteilungen mit $n = 1, \ldots, 10$ Freiheitsgraden.

Wir werden nun zeigen, dass die χ^2–Verteilung ein Spezialfall der Gammaverteilung ist. Zuerst betrachten wir die χ^2–Verteilung mit einem Freiheitsgrad.

Satz 8.2.3. *Sei $X \sim N(0,1)$. Dann ist $X^2 \sim Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Symbolisch: $\chi_1^2 \stackrel{d}{=} Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.*

Beweis. Wir bestimmen die Laplace–Transformierte von X^2:

$$m_{X^2}(t) = \mathbb{E}e^{tX^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{tx^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1-2t}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}.$$

Das gilt für komplexe t mit $\operatorname{Re} t < \frac{1}{2}$. Insbesondere erhalten wir mit $t = is$, dass für die charakteristische Funktion von X^2 gilt

$$\varphi_{X^2}(s) = \frac{1}{\sqrt{1-2is}}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Dies entspricht der charakteristischen Funktion einer Gammaverteilung mit Parametern $\alpha = 1/2$ und $\lambda = 1/2$. Da die charakteristische Funktion die Verteilung eindeutig festlegt, erhalten wir, dass $X^2 \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. $\square$

Satz 8.2.4. *Seien $X_1, \ldots, X_n \sim N(0,1)$ unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt*

$$X_1^2 + \ldots + X_n^2 \sim Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Symbolisch: $\chi_n^2 \stackrel{d}{=} Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass $X_1^2, \ldots, X_n^2 \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Außerdem sind die Zufallsvariablen $X_1^2, \ldots, X_n^2$ unabhängig. Der Satz folgt aus der Faltungseigenschaft der Gammaverteilung. $\square$

Bemerkung 8.2.5. Die Dichte einer χ_n^2–Verteilung ist somit gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

Beispiel 8.2.6. Seien $X_1, X_2 \sim \text{N}(0,1)$ unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt

$$X_1^2 + X_2^2 \sim \text{Gamma}\left(1, \frac{1}{2}\right) \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Symbolisch: $\chi_2^2 \stackrel{d}{=} \text{Exp}(\frac{1}{2})$.

8.3. Poisson–Prozess und die Erlang–Verteilung

Um den Poisson–Prozess einzuführen, betrachten wir folgendes Modell. Ein Gerät, das zum Zeitpunkt 0 installiert wird, habe eine Lebensdauer W_1. Sobald dieses Gerät kaputt geht, wird es durch ein neues baugleiches Gerät ersetzt, das eine Lebensdauer W_2 hat. Sobald dieses Gerät kaputt geht, wird ein neues Gerät installiert, und so weiter. Die Lebensdauer des i–ten Gerätes sei mit W_i bezeichnet. Die Zeitpunkte

$$S_n = W_1 + \ldots + W_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

bezeichnet man als *Erneuerungszeiten*, denn zu diesen Zeiten wird ein neues Gerät installiert.

Folgende Annahmen über $W_1, W_2, \ldots$ erscheinen plausibel. Wir nehmen an, dass $W_1, W_2, \ldots$ Zufallsvariablen sind. Da ein Gerät nichts von der Lebensdauer eines anderen mitbekommen kann, nehmen wir an, dass die Zufallsvariablen $W_1, W_2, \ldots$ unabhängig sind. Da alle Geräte die gleiche Bauart haben, nehmen wir an, dass $W_1, W_2, \ldots$ identisch verteilt sind. Welche Verteilung soll es nun sein? Es erscheint plausibel, dass diese Verteilung gedächtnislos sein muss, also werden wir annehmen, dass $W_1, W_2, \ldots$ exponentialverteilt sind.

Definition 8.3.1. Seien $W_1, W_2, \ldots$ unabhängige und mit Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariablen. Dann heißt die Folge $S_1, S_2, \ldots$ mit $S_n = W_1 + \ldots + W_n$ ein *Poisson–Prozess* mit Intensität λ.

Abbildung 4. Eine Realisierung des Poisson–Prozesses.

Wie ist nun die n–te Erneuerungszeit S_n verteilt? Da $W_i \sim \text{Exp}(\lambda) \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$ ist, ergibt sich aus der Faltungseigenschaft der Gammaverteilung, dass

$$S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda).$$

Diese Verteilung (also die Gamma(n, λ)–Verteilung, wobei n eine natürliche Zahl ist), nennt man auch die *Erlang–Verteilung*.

Aufgabe 8.3.2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E} S_n = \frac{n}{\lambda}$ und $\operatorname{Var} S_n = \frac{n}{\lambda^2}$.

Wir werden nun kurz auf die Bezeichnung "Poisson–Prozess" eingehen. Betrachte ein Intervall $I = [a, b] \subset [0, \infty)$ der Länge $l := b - a$. Sei $N(I)$ eine Zufallsvariable, die die Anzahl der Erneuerungen im Intervall I zählt, d.h.:

$$N(I) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{S_k \in I}.$$

Satz 8.3.3. *Es gilt* $N(I) \sim \text{Poi}(\lambda l)$.

Beweisidee. Betrachte ein sehr kleines Intervall $[t, t+\delta]$, wobei $\delta \approx 0$. Dann gilt aufgrund der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung

$$\mathbb{P}[\exists \text{ Erneuerung im Intervall } [t, t+\delta]] = \mathbb{P}[\exists \text{ Erneuerung im Intervall } [0, \delta]].$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens eine Erneuerung im Intervall $[0, \delta]$ gibt, lässt sich aber folgendermaßen berechnen:

$$\mathbb{P}[\exists \text{ Erneuerung im Intervall } [0, \delta]] = \mathbb{P}[W_1 < \delta] = 1 - e^{-\lambda\delta} \approx \lambda\delta.$$

Wir können nun ein beliebiges Intervall I der Länge l in $\approx l/\delta$ kleine disjunkte Intervalle der Länge δ zerlegen. Für jedes kleine Intervall der Länge δ ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in diesem Intervall mindestens eine Erneuerung gibt, $\approx \lambda\delta$. Außerdem sind verschiedene kleine Intervalle wegen der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung unabhängig voneinender. Somit gilt für die Anzahl der Erneuerungen $N(I)$ in einem Intervall I der Länge l

$$N(I) \approx \text{Bin}\left(\frac{l}{\delta}, \lambda\delta\right) \approx \text{Poi}(\lambda l),$$

wobei wir im letzten Schritt den Poisson–Grenzwertsatz benutzt haben. □

8.4. Empirischer Erwartungswert und empirische Varianz einer normalverteilten Stichprobe

Der nächste Satz beschreibt die gemeinsame Verteilung des empirischen Erwartungswerts $\bar{X}_n$ und der empirischen Varianz S_n^2 einer normalverteilten Stichprobe.

Satz 8.4.1. *Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und normalverteilte Zufallsvariablen mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. Definiere*

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}, \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Dann gelten folgende drei Aussagen:

(1) $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.
(2) $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.
(3) *Die Zufallsvariablen $\bar{X}_n$ und $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ sind unabhängig.*

Bemerkung 8.4.2. Teil 3 kann man auch wie folgt formulieren: Die Zufallsvariablen $\bar{X}_n$ und S_n^2 sind unabhängig.

Beweis von Teil 1. Nach Voraussetzung sind $X_1, \ldots, X_n$ normalverteilt mit Parametern (μ, σ^2) und unabhängig. Aus der Faltungseigenschaft der Normalverteilung folgt, dass die Summe $X_1 + \ldots + X_n$ normalverteilt mit Parametern $(n\mu, n\sigma^2)$ ist. Somit ist $\bar{X}_n$ normalverteilt mit Parametern $(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. □

Die folgende Überlegung vereinfacht die Notation im Rest des Beweises. Betrachte die standardisierten Zufallsvariablen

$$X_i' = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

Es seien $\bar{X}_n'$ der empirische Mittelwert und $S_n'^2$ die empirische Varianz dieser Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma X_i' + \mu) = \sigma \bar{X}_n' + \mu, \quad S_n^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i' - \bar{X}_n')^2 = \sigma^2 S_n'^2.$$

Um die Unabhängigkeit von $\bar{X}_n$ und S_n^2 zu zeigen, reicht es, die Unabhängigkeit von $\bar{X}_n'$ und $S_n'^2$ zu zeigen. Außerdem ist

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_n'^2}{1}.$$

Für den Rest des Beweises können wir also annehmen, dass $X_1, \dots, X_n$ standardnormalverteilt sind, ansonsten kann man stattdessen $X_1', \dots, X_n'$ betrachten.

Beweis von Teil 3. Seien also $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{N}(0,1)$. Wir zeigen, dass $\bar{X}_n$ und S_n^2 unabhängig sind.

Schritt 1. Wir können S_n^2 als eine Funktion von $X_2 - \bar{X}_n, \dots, X_n - \bar{X}_n$ auffassen, denn wegen $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n) = 0$ gilt

$$(n-1)S_n^2 = \left(\sum_{i=2}^n (X_i - \bar{X}_n)\right)^2 + \sum_{i=2}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \rho(X_2 - \bar{X}_n, \dots, X_n - \bar{X}_n),$$

wobei

$$\rho(x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=2}^n x_i\right)^2 + \sum_{i=2}^n x_i^2.$$

Somit genügt es zu zeigen, dass die Zufallsvariable $\bar{X}_n$ und der Zufallsvektor $(X_2 - \bar{X}_n, \dots, X_n - \bar{X}_n)$ unabhängig sind.

Schritt 2. Dazu berechnen wir die gemeinsame Dichte von $(\bar{X}_n, X_2 - \bar{X}_n, \dots, X_n - \bar{X}_n)$. Die gemeinsame Dichte von $(X_1, \dots, X_n)$ ist nach Voraussetzung

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right).$$

Betrachte nun die Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, wobei

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_n,\ \psi_2(x_1, \dots, x_n) = x_2 - \bar{x}_n,\ \dots,\ \psi_n(x_1, \dots, x_n) = x_n - \bar{x}_n.$$

Die Umkehrfunktion $\phi = \psi^{-1}$ ist somit gegeben durch $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ mit

$$\phi_1(y_1, \dots, y_n) = y_1 - \sum_{i=2}^n y_i,\ \phi_2(y_1, \dots, y_n) = y_1 + y_2,\ \dots,\ \phi_n(y_1, \dots, y_n) = y_1 + y_n.$$

Die Jacobi–Determinante von ϕ ist konstant (und gleich n, wobei dieser Wert eigentlich nicht benötigt wird).

Schritt 3. Für die Dichte von $(\bar{X}_n, X_2 - \bar{X}_n, \dots, X_n - \bar{X}_n) = \psi(X_1, \dots, X_n)$ gilt mit dem Dichtetransformationssatz

$$\begin{aligned} g(y_1, \dots, y_n) &= n f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y_1 - \sum_{i=2}^n y_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=2}^n (y_1 + y_i)^2\right) \\ &= \frac{n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{n y_1^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^n y_i^2 - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^n y_i\right)^2\right). \end{aligned}$$

Somit ist $\bar{X}_n$ unabhängig von $(X_2 - \bar{X}_n, \dots, X_n - \bar{X}_n)$. $\square$

Beweis von Teil 2. Es gilt die Identität

$$Z := \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 + (\sqrt{n}\bar{X}_n)^2 =: Z_1 + Z_2.$$

Dabei gilt:

(1) $Z \sim \chi_n^2$ nach Definition der χ^2–Verteilung.
(2) $Z_2 \sim \chi_1^2$, denn $\sqrt{n}\bar{X}_n \sim \mathrm{N}(0,1)$.
(3) Z_1 und Z_2 sind unabhängig (wegen Teil 3 des Satzes).

Damit ergibt sich für die charakteristische Funktion von Z_1:

$$\varphi_{Z_1}(t) = \frac{\varphi_Z(t)}{\varphi_{Z_2}(t)} = \frac{\frac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}}}{\frac{1}{(1-2it)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{(1-2it)^{(n-1)/2}}.$$

Somit ist $(n-1)S_n^2 = Z_1 \sim \mathrm{Gamma}(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}) \stackrel{d}{=} \chi_{n-1}^2$. $\square$

8.5. t–Verteilung

Definition 8.5.1. Seien $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ und $U \sim \chi_r^2$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei $r \in \mathbb{N}$. Die Zufallvariable

$$V = \frac{X}{\sqrt{\frac{U}{r}}}$$

heißt *t–verteilt* mit r Freiheitsgraden.

Notation 8.5.2. $V \sim t_r$.

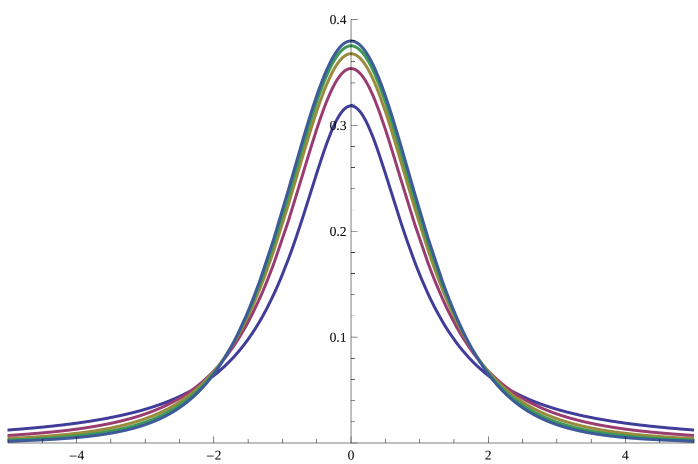

Abbildung 5. Dichten der t_r–Verteilungen mit $r = 1, \dots, 5$ Freiheitsgraden.

Satz 8.5.3. *Die Dichte einer t–verteilten Zufallsvariable $V \sim t_r$ ist gegeben durch*

$$f_V(t) = \frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})}{\Gamma(\frac{r}{2})} \frac{1}{\sqrt{r\pi}(1+\frac{t^2}{r})^{\frac{r+1}{2}}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Nach Definition der t–Verteilung gilt die Darstellung

$$V = \frac{X}{\sqrt{\frac{U}{r}}},$$

wobei $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ und $U \sim \chi_r^2$ unabhängig sind. Die gemeinsame Dichte von X und U ist gegeben durch

$$f_{X,U}(x,u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{u^{\frac{r-2}{2}} e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma(\frac{r}{2})}, \quad x \in \mathbb{R},\ u > 0.$$

Betrachten wir nun die Abbildung $(x,u) \mapsto (v,w)$ mit

$$v = \frac{x}{\sqrt{\frac{u}{r}}},\ w = u.$$

Die Umkehrabbildung ist somit $x = v\sqrt{\frac{w}{r}}$ und $u = w$. Die Jacobi–Determinante der Umkehrabbildung ist $\sqrt{\frac{w}{r}}$. Somit gilt für die gemeinsame Dichte von (V,W)

$$f_{V,W}(v,w) = f_{X,Y}(x,y)\sqrt{\frac{w}{r}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2 w}{2r}\right) \frac{w^{\frac{r-2}{2}} e^{-\frac{w}{2}}}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma(\frac{r}{2})} \sqrt{\frac{w}{r}}.$$

Somit kann die Dichte von V wie folgt berechnet werden:

$$f_V(v) = \int_0^\infty f_{V,W}(v,w)dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}2^{r/2}\Gamma(\frac{r}{2})} \int_0^\infty \exp\left(-w\left(\frac{v^2}{2r}+\frac{1}{2}\right)\right) w^{\frac{r+1}{2}-1} dw.$$

Mit der Formel $\int_0^\infty w^{\alpha-1}e^{-\lambda w}dw = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$ berechnet sich das Integral zu

$$f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}2^{r/2}\Gamma(\frac{r}{2})} \frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})}{(\frac{v^2}{2r}+\frac{1}{2})^{\frac{r+1}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})}{\Gamma(\frac{r}{2})} \frac{1}{\sqrt{r\pi}(1+\frac{v^2}{r})^{\frac{r+1}{2}}}.$$

Dies ist genau die gewünschte Formel. □

Beispiel 8.5.4. Die Dichte der t_1–verteilung ist $f_V(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$ und stimmt somit mit der Dichte der Cauchy–Verteilung überein.

Aufgabe 8.5.5. Zeigen Sie, dass für $r \to \infty$ die Dichte der t_r–Verteilung punktweise gegen die Dichte der Standardnormalverteilung konvergiert.

Satz 8.5.6. *Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und normalverteilte Zufallsvariablen mit Parametern (μ, σ^2). Dann gilt*

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim N(0,1), \quad \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1}.$$

Beweis. Die erste Formel folgt aus der Tatsache, dass $\bar{X}_n \sim \mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. Wir beweisen die zweite Formel. Es gilt die Darstellung

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} = \frac{\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\,\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}}}.$$

Da nach Satz 8.4.1 die Zufallsvariablen $\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$ und $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ unabhängig sind, hat $\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\mu}{S_n}$ eine t–Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden. □

8.6. F–Verteilung

Definition 8.6.1. Seien $r, s \in \mathbb{N}$ Parameter. Seien $U_r \sim \chi^2_r$ und $U_s \sim \chi^2_s$ unabhängige Zufallsvariablen. Dann heißt die Zufallsvariable

$$W = \frac{U_r/r}{U_s/s}$$

F-verteilt mit (r,s)–Freiheitsgraden.

Notation 8.6.2. $W \sim F_{r,s}$.

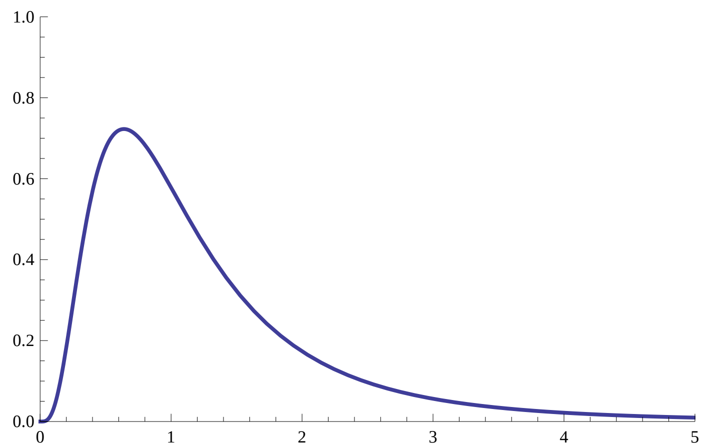

Abbildung 6. Dichte der F–Verteilung mit $(10,8)$–Freiheitsgraden.

Satz 8.6.3. *Die Dichte einer F–verteilten Zufallsvariable $W \sim F_{r,s}$ ist gegeben durch*

$$f_W(t) = \frac{\Gamma(\frac{r+s}{2})}{\Gamma(\frac{r}{2})\Gamma(\frac{s}{2})}\left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{r}{2}} \frac{t^{\frac{r}{2}-1}}{\left(1+\frac{r}{s}t\right)^{\frac{r+s}{2}}}, \quad t > 0.$$

Beweis. Wir werden die Dichte nur bis auf die multiplikative Konstante berechnen. Die Konstante ergibt sich dann aus der Bedingung, dass die Dichte sich zu 1 integriert. Wir schreiben $f(t) \propto g(t)$, falls $f(t) = Cg(t)$, wobei C eine Konstante ist.
Wir haben die Darstellung

$$W = \frac{U_r/r}{U_s/s},$$

wobei $U_r \sim \chi^2_r$ und $U_s \sim \chi^2_s$ unabhängig sind. Für die Dichten von U_r und U_s gilt

$$f_{U_r}(x) \propto x^{\frac{r-2}{2}} e^{-x/2}, \quad f_{U_s}(x) \propto x^{\frac{s-2}{2}} e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

Somit folgt für die Dichten von U_r/r und U_s/s, dass

$$f_{U_r/r}(x) \propto x^{\frac{r-2}{2}} e^{-rx/2}, \quad f_{U_s/s}(x) \propto x^{\frac{s-2}{2}} e^{-sx/2}, \quad x > 0.$$

Für die Dichte von W gilt die Faltungsformel:

$$f_W(t) = \int_{\mathbb{R}} |y| f_{U_r/r}(yt) f_{U_s/s}(y) dy.$$

Indem wir nun die Dichten von U_r/r und U_s/s einsetzen, erhalten wir, dass

$$f_W(t) \propto \int_0^\infty y(yt)^{\frac{r-2}{2}} e^{-\frac{ryt}{2}} y^{\frac{s-2}{2}} e^{-\frac{sy}{2}} dy \propto t^{\frac{r-2}{2}} \int_0^\infty y^{1+\frac{r-2}{2}+\frac{s-2}{2}} \exp\left(-y\left(\frac{rt}{2}+\frac{s}{2}\right)\right) dy.$$

Mit der Formel $\int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$ berechnet sich das Integral zu

$$f_W(t) \propto t^{\frac{r-2}{2}} \frac{1}{(rt+s)^{\frac{r+s}{2}}} \propto \frac{t^{\frac{r-2}{2}}}{(1+\frac{r}{s}t)^{\frac{r+s}{2}}}.$$

Dies ist genau die gewünschte Dichte, bis auf eine multiplikative Konstante. $\square$