KAPITEL 9

Konfidenzintervalle

Sei $\{h_\theta(x) : \theta \in \Theta\}$ eine Familie von Dichten bzw. Zähldichten. In diesem Kapitel ist $\Theta = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte bzw. Zähldichte h_θ. Wir haben uns bereits mit der Frage beschäftigt, wie man den Parameter θ anhand der Stichprobe schätzen kann. Bei einer solchen Schätzung bleibt aber unklar, wie groß der mögliche Fehler, also die Differenz $\hat{\theta} - \theta$, ist. In der Statistik begnügt man sich normalerweise nicht mit der Angabe eines Schätzers, sondern versucht auch den Schätzfehler abzuschätzen, indem man ein sogenanntes Konfidenzintervall für θ angibt. Das Ziel ist es, das Intervall so zu konstruieren, dass es den wahren Wert des Parameters θ mit einer großen Wahrscheinlichkeit (typischerweise 0.99 oder 0.95) enthält.

Definition 9.0.1. Sei $\alpha \in (0, 1)$ eine kleine Zahl, typischerweise $\alpha = 0.01$ oder $\alpha = 0.05$. Es seien $\underline{\theta} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $\overline{\theta} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ zwei Stichprobenfunktionen mit

$$\underline{\theta}(x_1, \ldots, x_n) \leq \overline{\theta}(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{für alle } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Wir sagen, dass $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ ein *Konfidenzintervall* für θ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha \in (0, 1)$ ist, falls

$$\mathbb{P}_\theta[\underline{\theta}(X_1, \ldots, X_n) \leq \theta \leq \overline{\theta}(X_1, \ldots, X_n)] \geq 1 - \alpha \text{ für alle } \theta \in \Theta.$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zufällige Intervall $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ den richtigen Wert θ enthält, mindestens $1 - \alpha$, also typischerweise 0.99 oder 0.95.

Die allgemeine Vorgehensweise bei der Konstruktion der Konfidenzintervalle ist diese: Man versucht, eine sogenannte *Pivot–Statistik* zu finden, d. h. eine Funktion $T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ der Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ und des unbekannten Parameters θ mit der Eigenschaft, dass die Verteilung von $T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ unter $\mathbb{P}_\theta$ nicht von θ abhängt und explizit angegeben werden kann. Das heißt, es soll gelten, dass

$$\mathbb{P}_\theta[T(X_1, \ldots, X_n; \theta) \leq t] = F(t),$$

wobei $F(t)$ nicht von θ abhängt. Dabei soll die Funktion $T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ den Parameter θ tatsächlich auf eine nichttriviale Weise enthalten. Für $\alpha \in (0, 1)$ bezeichnen wir mit Q_α das α–Quantil der Verteilungsfunktion F, d. h. die Lösung der Gleichung $F(Q_\alpha) = \alpha$. Dann gilt

$$\mathbb{P}_\theta \left[Q_{\frac{\alpha}{2}} \leq T(X_1, \ldots, X_n; \theta) \leq Q_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha \text{ für alle } \theta \in \Theta.$$

Indem wir nun diese Ungleichung nach θ auflösen, erhalten wir ein Konfidenzintervall für θ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$.

Im Folgenden werden wir verschiedene Beispiele von Konfidenzintervallen betrachten.

9.1. Konfidenzintervalle für die Parameter der Normalverteilung

In diesem Abschnitt seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ unabhängige und mit Parametern (μ, σ^2) normalverteilte Zufallsvariablen. Unser Ziel ist es, Konfidenzintervalle für μ und σ^2 zu konstruieren. Dabei werden wir vier Fälle betrachten:

(1) Konfidenzintervall für μ bei bekanntem σ^2.
(2) Konfidenzintervall für μ bei unbekanntem σ^2.
(3) Konfidenzintervall für σ^2 bei bekanntem μ.
(4) Konfidenzintervall für σ^2 bei unbekanntem μ.

Fall 1: Konfidenzintervall für μ bei bekanntem σ^2. Es seien also $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ unabhängig, wobei μ unbekannt und σ^2 bekannt seien. Wir konstruieren ein Konfidenzintervall für μ. Ein natürlicher Schätzer für μ ist $\bar{X}_n$. Wir haben gezeigt, dass

$$\bar{X}_n \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Wir werden nun $\bar{X}_n$ standardisieren:

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

Für $\alpha \in (0,1)$ sei z_α das α–Quantil der Standardnormalverteilung. D.h., z_α sei die Lösung der Gleichung $\Phi(z_\alpha) = \alpha$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet. Somit gilt

$$\mathbb{P}_\mu\left[z_{\frac{\alpha}{2}} \le \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha \text{ für alle } \mu \in \mathbb{R}.$$

Nach μ umgeformt führt dies zu

$$\mathbb{P}_\mu\left[\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha \text{ für alle } \mu \in \mathbb{R}.$$

Wegen der Symmetrie der Normalverteilung ist $z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Somit ist ein Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ für μ gegeben durch

$$\left[\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Der Mittelpunkt dieses Intervalls ist $\bar{X}_n$.

Bemerkung 9.1.1. Man kann auch "nichtsymmetrische" Konfidenzintervalle konstruieren. Wähle dazu $\alpha_1 \ge 0$, $\alpha_2 \ge 0$ mit $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Dann gilt

$$\mathbb{P}_\mu\left[z_{\alpha_1} \le \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \le z_{1-\alpha_2}\right] = 1 - \alpha \text{ für alle } \mu \in \mathbb{R}.$$

Nach μ umgeformt führt dies zu

$$\mathbb{P}_\mu\left[\bar{X}_n - z_{1-\alpha_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}_n - z_{\alpha_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha \text{ für alle } \mu \in \mathbb{R}.$$

Wegen $z_{\alpha_1} = -z_{1-\alpha_1}$ führt dies zu folgendem Konfidenzintervall für μ:

$$\left[\bar{X}_n - z_{1-\alpha_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + z_{1-\alpha_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Interessiert man sich z. B. nur für eine obere Schranke für μ, so kann man $\alpha_1 = \alpha$ und $\alpha_2 = 0$ wählen. Dann erhält man folgendes Konfidenzintervall für μ:

$$\left[-\infty,\ \bar{X}_n + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Die Konstruktion der nichtsymmetrischen Konfidenzintervalle lässt sich auch für die nachfolgenden Beispiele durchführen, wird aber hier nicht mehr wiederholt.

Fall 2: Konfidenzintervall für μ bei unbekanntem σ^2. Es seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ unabhängig, wobei μ und σ^2 beide unbekannt seien. Wir konstruieren ein Konfidenzintervall für μ. Es gilt zwar nach wie vor, dass $\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$, wir können das aber nicht für die Konstruktion eines Konfidenzintervalls für μ benutzen, denn der Parameter σ^2 ist unbekannt. Wir werden deshalb σ^2 durch einen Schätzer, nämlich $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$, ersetzen. Wir haben im vorigen Kapitel gezeigt, dass

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1}.$$

Sei $t_{n-1,\alpha}$ das α–Quantil der t_{n-1}–Verteilung. Somit gilt

$$\mathbb{P}_{\mu,\sigma^2}\left[t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \le \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \le t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha \quad \text{für alle } \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0.$$

Nach μ umgeformt führt dies zu

$$\mathbb{P}_{\mu,\sigma^2}\left[\bar{X}_n - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}_n - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha \quad \text{für alle } \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0.$$

Wegen der Symmetrie der t–Verteilung gilt $t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} = -t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$. Somit erhalten wir folgendes Konfidenzintervall für μ zum Niveau $1 - \alpha$:

$$\left[\bar{X}_n - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right].$$

Fall 3: Konfidenzintervall für σ^2 bei bekanntem μ. Seien nun $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei μ bekannt und σ^2 unbekannt seien. Wir konstruieren ein Konfidenzintervall für σ^2. Ein natürlicher Schätzer für σ^2 ist

$$\widetilde{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

Dann gilt

$$\frac{n\widetilde{S}_n^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2.$$

Sei $\chi^2_{n,\alpha}$ das α–Quantil der χ^2–Verteilung mit n Freiheitsgraden. Dann gilt

$$\mathbb{P}_{\sigma^2}\left[\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{n\widetilde{S}_n^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha \quad \text{für alle } \sigma^2 > 0.$$

Nach σ^2 umgeformt führt dies zu folgendem Konfidenzintervall für σ^2 zum Niveau $1-\alpha$:

$$\left[\frac{n\widetilde{S}_n^2}{\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{n\widetilde{S}_n^2}{\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}\right].$$

Es sei bemerkt, dass die χ^2–Verteilung nicht symmetrisch ist.

Fall 4: Konfidenzintervall für σ^2 bei unbekanntem μ. Seien $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei μ und σ^2 beide unbekannt seien. Wir konstruieren ein Konfidenzintervall für σ^2. Ein natürlicher Schätzer für σ^2 ist

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Bekannt ist, dass

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Somit gilt

$$\mathbb{P}_{\mu,\sigma^2}\left[\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha \quad \text{für alle } \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0.$$

Nach σ^2 umgeformt führt dies zu

$$\mathbb{P}_{\mu,\sigma^2}\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right] = 1-\alpha \quad \text{für alle } \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0.$$

Somit erhält man folgendes Konfidenzintervall für σ^2 zum Niveau $1-\alpha$

$$\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right].$$

9.2. Asymptotisches Konfidenzintervall für die Erfolgswahrscheinlichkeit bei Bernoulli–Experimenten

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und Bernoulli–verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\theta \in (0,1)$. Wir wollen ein Konfidenzintervall für die Erfolgswahrscheinlichkeit θ konstruieren. Ein natürlicher Schätzer für θ ist $\bar{X}_n$. Diese Zufallsvariable hat eine reskalierte Binomialverteilung. Es ist nicht einfach, mit den Quantilen dieser Verteilung umzugehen. Somit ist es schwierig, ein exaktes Konfidenzintervall für θ zu einem vorgegebenen Niveau zu konstruieren. Auf der anderen Seite, können wir nach dem Zentralen Grenzwertsatz die Verteilung von $\bar{X}_n$ für großes n durch eine Normalverteilung approximieren. Man kann also versuchen, ein Konfidenzintervall zu konstruieren, das zumindest bei einem sehr großen Stichprobenumfang n das vorgegebene Niveau approximativ erreicht. Dafür benötigen wir die folgende allgemeine Definition.

Definition 9.2.1. Eine Folge $[\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1], [\underline{\theta}_2, \overline{\theta}_2], \ldots$ von Konfidenzintervallen, wobei $\underline{\theta}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $\overline{\theta}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, heißt *asymptotisches Konfidenzintervall* zum Niveau $1-\alpha$, falls

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta[\underline{\theta}_n(X_1,\ldots,X_n) \le \theta \le \overline{\theta}_n(X_1,\ldots,X_n)] \ge 1-\alpha \quad \text{für alle } \theta \in \Theta.$$

Nun kehren wir zu unserem Problem mit den Bernoulli–Experimenten zurück. Nach dem Zentralen Grenzwertsatz gilt

$$\frac{X_1+\ldots+X_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{N}(0,1),$$

denn $\mathbb{E}X_i = \theta$ und $\operatorname{Var} X_i = \theta(1-\theta)$. Durch Umformung ergibt sich

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{N}(0,1).$$

Sei z_α das α–Quantil der Standardnormalverteilung. Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta\left[z_{\frac{\alpha}{2}} \le \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha \quad \text{für alle } \theta \in (0,1).$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Standardnormalverteilung ist $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{\alpha}{2}}$. Definiere deshalb $z := z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{\alpha}{2}}$. Somit müssen wir θ bestimmen, so dass folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\sqrt{n}\,|\bar{X}_n - \theta| \le z\sqrt{\theta(1-\theta)}.$$

Quadrierung führt zu

$$n(\bar{X}_n^2 + \theta^2 - 2\bar{X}_n\theta) \le z^2\theta(1-\theta).$$

Dies lässt sich umschreiben zu

$$g(\theta) := \theta^2\left(1+\frac{z^2}{n}\right) - \theta\left(2\bar{X}_n + \frac{z^2}{n}\right) + \bar{X}_n^2 \le 0.$$

Die Funktion $g(\theta)$ ist quadratisch und hat (wie wir gleich sehen werden) zwei verschiedene reelle Nullstellen. Somit ist $g(\theta) \le 0$ genau dann, wenn θ zwischen diesen beiden Nullstellen liegt. Indem wir nun die Nullstellen mit der p–q–Formel berechnen, erhalten wir folgendes Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ für θ:

$$\left[\frac{\bar{X}_n + \frac{z^2}{2n} - \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)+\frac{z^2}{4n}}}{1+\frac{z^2}{n}}, \frac{\bar{X}_n + \frac{z^2}{2n} + \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)+\frac{z^2}{4n}}}{1+\frac{z^2}{n}}\right].$$

Für großes n erhalten wir die folgende Approximation (indem wir alle Terme mit $1/\sqrt{n}$ stehen lassen und alle Terme mit $1/n$ ignorieren):

$$\left[\bar{X}_n - \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)},\ \bar{X}_n + \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}\right].$$

Später werden wir diese Approximation mit dem Satz von Slutsky begründen.

Beispiel 9.2.2. Bei einer Wahlumfrage werden n Personen befragt, ob sie eine Partei A wählen. Es soll ein Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 für den Stimmenanteil θ konstruiert werden und die Länge dieses Intervalls soll höchstens 0.02 sein. Wie viele Personen müssen dafür befragt werden?

Lösung. Wir betrachten die Wahlumfrage als ein n-faches Bernoulli–Experiment. Die Länge des Konfidenzintervalls für θ soll höchstens 0.02 sein, also erhalten wir die Ungleichung

$$\frac{2z}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)} \leq 0.02.$$

Quadrieren und nach n Umformen ergibt die Ungleichung

$$n \geq \frac{4z^2\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{0.02^2}.$$

Der Mitelwert $\bar{X}_n$ ist zwar unbekannt, allerdings gilt $0 \leq \bar{X}_n \leq 1$ und somit $\bar{X}_n(1-\bar{X}_n) \leq 1/4$. Es reicht also auf jeden Fall, wenn

$$n \geq \frac{z^2}{0.02^2}.$$

Nun erinnern wir uns daran, dass z das $(1-\frac{\alpha}{2})$–Quantil der Standardnormalverteilung ist. Das Konfidenzniveau soll $1-\alpha = 0.95$ sein, also ist $1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$. Das 0.975–Quantil der Standardnormalverteilung errechnet sich (z. B. aus einer Tabelle) als Lösung von $\Phi(z) = 0.975$ zu $z = 1.96$. Es müssen also $n \geq \frac{1.96^2}{0.02^2} = 9604$ Personen befragt werden.

9.3. Satz von Slutsky

Bei der Konstruktion von Konfidenzintervallen findet der folgende Satz sehr oft Anwendung.

Satz 9.3.1 (Satz von Slutsky). *Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ und $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ Zufallsvariablen, die auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert sind. Gilt*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X \text{ und } Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} c,$$

wobei c eine Konstante ist, so folgt, dass

$$X_nY_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} cX.$$

Beweis. Schritt 1. Es genügt, die punktweise Konvergenz der charakteristischen Funktionen zu zeigen. D.h., wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}e^{itX_nY_n} = \mathbb{E}e^{itcX} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Sei $\varphi(s) = e^{its}$. Diese Funktion ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ und betragsmäßig durch 1 beschränkt. Wir zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\varphi(X_nY_n) = \mathbb{E}\varphi(cX).$$

Schritt 2. Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von φ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } |x-y| \leq \delta.$$

SCHRITT 3. Sei $A > 0$ so groß, dass $\mathbb{P}[|X| > A] \le \varepsilon$. Wir können annehmen, dass A und $-A$ Stetigkeitspunkte der Verteilungsfunktion von X sind, ansonsten kann man A vergrößern. Da $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ und $A, -A$ keine Atome von X sind, folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X_n| > A] = \mathbb{P}[|X| > A] \le \varepsilon.$$

Also gilt $\mathbb{P}[|X_n| > A] \le 2\varepsilon$ für große n.

SCHRITT 4. Es gilt

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}\varphi(X_nY_n) - \mathbb{E}\varphi(cY)| &\le \mathbb{E}|\varphi(X_nY_n) - \varphi(cX_n)| + |\mathbb{E}\varphi(cX_n) - \mathbb{E}\varphi(cX)|\\ &\le E_1 + E_2 + E_3 + E_4\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}E_1 &= \mathbb{E}\left[|\varphi(X_nY_n) - \varphi(cX_n)|\mathbb{1}_{|Y_n - c| > \frac{\delta}{A}}\right],\\ E_2 &= \mathbb{E}\left[|\varphi(X_nY_n) - \varphi(cX_n)|\mathbb{1}_{|Y_n - c| \le \frac{\delta}{A},\, |X_n| > A}\right],\\ E_3 &= \mathbb{E}\left[|\varphi(X_nY_n) - \varphi(cX_n)|\mathbb{1}_{|Y_n - c| \le \frac{\delta}{A},\, |X_n| \le A}\right],\\ E_4 &= |\mathbb{E}\varphi(cX_n) - \mathbb{E}\varphi(cX)|.\end{aligned}$$

SCHRITT 5. Wir werden nun $E_1, \ldots, E_4$ abschätzen.

E_1: Da $|\varphi(t)| \le 1$ ist, folgt, dass $E_1 \le 2\mathbb{P}[|Y_n - c| > \delta/A]$. Dieser Term konvergiert gegen 0 für $n \to \infty$, da Y_n gegen c in Verteilung (und somit auch in Wahrscheinlichkeit) konvergiert.

E_2: Für E_2 gilt die Abschätzung $E_2 \le 2\mathbb{P}[|X_n| > A] \le 4\varepsilon$ nach Schritt 3, wenn n groß genug ist.

E_3: Es gilt $E_3 \le \varepsilon$, da $|X_nY_n - cX_n| \le \delta$ falls $|Y_n - c| \le \delta/A$ und $|X_n| \le A$. Aus Schritt 2 folgt dann, dass $|\varphi(X_nY_n) - \varphi(cX_n)| \le \varepsilon$.

E_4: Der Term E_4 konvergiert für $n \to \infty$ gegen 0, denn $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\varphi(cX_n) = \mathbb{E}\varphi(cX)$, denn nach Voraussetzung konvergiert X_n in Verteilung gegen X.

Indem wir nun alles zusammenfassen, erhalten wir, dass

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}\varphi(X_nY_n) - \mathbb{E}\varphi(cY)| \le 5\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt, dass $\lim_{n\to\infty} |\mathbb{E}\varphi(X_nY_n) - \mathbb{E}\varphi(cY)| = 0$. Somit ist $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\varphi(X_nY_n) = \mathbb{E}\varphi(cY)$. □

BEISPIEL 9.3.2. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und Bernoulli–verteilt mit Parameter $\theta \in (0, 1)$. Wir konstruieren ein asymptotisches Konfidenzintervall für θ. Nach dem Zentralen Grenzwertsatz gilt

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{N}(0, 1).$$

Leider kommt hier θ sowohl im Zähler als auch im Nenner vor. Deshalb hat sich bei unserer früheren Konstruktion eine quadratische Gleichung ergeben. Wir werden nun θ im Nenner eliminieren, indem wir es durch einen Schätzer, nämlich $\bar{X}_n$, ersetzen. Nach dem Satz von Slutsky gilt nämlich, dass

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\theta}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}=\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}\xrightarrow[n\to\infty]{d}\mathrm{N}(0,1),$$

denn nach dem Gesetz der großen Zahlen konvergiert $\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}$ fast sicher (und somit auch in Verteilung) gegen 1. Es gilt also

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_\theta\left[z_{\frac{\alpha}{2}}\leq\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\theta}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}\leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha\quad\text{für alle }\theta\in(0,1).$$

Sei $z:=-z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Daraus ergibt sich folgendes aysmptotisches Konfidenzintervall für θ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$:

$$\left[\bar{X}_n-\frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)},\,\bar{X}_n+\frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}\right].$$

Dieses Intervall haben wir oben mit einer anderen Methode hergeleitet.

Aufgabe 9.3.3. Zeigen Sie mit dem Satz von Slutsky, dass $t_n\xrightarrow[n\to\infty]{d}\mathrm{N}(0,1)$. Dabei ist t_n die t–Verteilung mit n Freiheitsgraden.

9.4. Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Poissonverteilung

Seien $X_1,\ldots,X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i\sim\mathrm{Poi}(\theta)$, wobei $\theta>0$. Gesucht ist ein Konfidenzintervall für θ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$. Ein natürlicher Schätzer für θ ist $\bar{X}_n$. Da für die Poisson–Verteilung $\mathbb{E}X_i=\operatorname{Var}X_i=\theta$ gilt, folgt durch den zentralen Grenzwertsatz, dass

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\theta}{\sqrt{\theta}}\xrightarrow[n\to\infty]{d}\mathrm{N}(0,1).$$

Es sei z_α das α–Quantil der Standardnormalverteilung. Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_\theta\left[z_{\frac{\alpha}{2}}\leq\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\theta}{\sqrt{\theta}}\leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha\quad\text{für alle }\theta>0.$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Standardnormaverteilung gilt $z:=z_{1-\frac{\alpha}{2}}=-z_{\frac{\alpha}{2}}$. Wir erhalten also folgende Ungleichung für θ:

$$\sqrt{n}\,|\bar{X}_n-\theta|\leq\sqrt{\theta}z.$$

Dies lässt sich durch Quadrierung umschreiben zu

$$g(\theta):=\theta^2-\theta\left(2\bar{X}_n+\frac{z^2}{n}\right)+\bar{X}_n^2\leq 0.$$

Die Ungleichung $g(\theta)\leq 0$ gilt genau dann, wenn θ zwischen den beiden Nullstellen der quadratischen Gleichung $g(\theta)=0$ liegt. Diese lassen durch Verwendung der p–q–Formel berechnen. Es ergibt sich folgendes asymptotisches Konfidenzintervall für θ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$:

$$\left[\bar{X}_n + \frac{z^2}{2n} - \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X}_n + \frac{z^2}{2n}},\ \bar{X}_n + \frac{z^2}{2n} + \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X}_n + \frac{z^2}{2n}}\right].$$

Indem man nun alle Terme mit $1/\sqrt{n}$ stehen lässt und alle Terme mit $1/n$ ignoriert, erhält man die Approximation

$$\left[\bar{X}_n - \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X}_n},\ \bar{X}_n + \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X}_n}\right].$$

Das Argument mit der quadratischen Gleichung lässt sich mit dem Satz von Slutsky vermeiden. Nach dem Zentralen Grenzwertsatz gilt nach wie vor

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\theta}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{N}(0,1).$$

Leider kommt hier der Parameter θ sowohl im Zähler als auch im Nenner vor, was im obigen Argument zu einer quadratischen Gleichung führte. Wir können allerdings θ durch einen Schätzer für θ, nämlich durch $\bar{X}_n$, ersetzen. Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen konvergiert $\sqrt{\theta/\bar{X}_n}$ fast sicher (und somit auch in Verteilung) gegen 1. Nach dem Satz von Slutsky gilt dann

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\bar{X}_n}} = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\theta}}\sqrt{\frac{\theta}{\bar{X}_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{N}(0,1).$$

Somit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta\left[-z \le \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\bar{X}_n}} \le z\right] = 1-\alpha \text{ für alle } \theta > 0.$$

Es ergibt sich also wieder einmal das asymptotische Konfidenzintervall

$$\left[\bar{X}_n - \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X}_n},\ \bar{X}_n + \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X}_n}\right].$$

9.5. Zweistichprobenprobleme

Bislang haben wir nur sogenannte Einstichprobenprobleme betrachtet. Es gibt aber auch mehrere Probleme, bei denen man zwei Stichproben miteinander vergleichen muss.

Beispiel 9.5.1. Es sollen zwei Futterarten für Masttiere verglichen werden. Dazu betrachtet man zwei Gruppen von Tieren. Die erste, aus n Tieren bestehende Gruppe bekommt Futter 1. Die zweite, aus m Tieren bestehende Gruppe, bekommt Futter 2. Mit $X_1,\ldots,X_n$ wird die Gewichtszunahme der Tiere der ersten Gruppe notiert. Entsprechend bezeichnen wir die Gewichtszunahmen der Tiere aus der zweiten Gruppe mit $Y_1,\ldots,Y_m$. Die Aufgabe besteht nun darin, die beiden Futterarten zu vergleichen, also ein Konfidenzintervall für $\mu_1-\mu_2$ zu finden, wobei μ_1 bzw. μ_2 der Erwartungswert der ersten bzw. der zweiten Stichprobe ist.

Beispiel 9.5.2. Es wurden zwei Messverfahren zur Bestimmung einer physikalischen Größe entwickelt. Es soll nun ermittelt werden, welches Verfahren eine größere Genauigkeit (also eine kleinere Streuung der Messergebnisse) hat. Dazu wird die physikalische Größe zuerst n Mal mit dem ersten Verfahren gemessen, und dann m Mal mit dem zweiten Verfahren.

Es ergeben sich zwei Stichproben $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_m$. Diesmal sollen die Streuungen der beiden Stichproben verglichen werden, also ein Konfidenzintervall für σ_1^2/σ_2^2 konstruiert werden, wobei σ_1^2 bzw. σ_2^2 die Varianz der ersten bzw. der zweiten Stichprobe ist.

Für die obigen Beispiele erscheint folgendes Modell plausibel. Wir betrachten zwei Stichproben $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_m$. Wir nehmen an, dass

(1) $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängige Zufallsvariablen sind.
(2) $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$.
(3) $Y_1, \ldots, Y_m \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Wir werden Konfidenzintervalle für $\mu_1 - \mu_2$ und σ_1^2/σ_2^2 konstruieren.

Fall 1: Konfidenzintervall für $\mu_1 - \mu_2$ bei bekannten σ_1^2 und σ_2^2. Es seien also σ_1^2 und σ_2^2 bekannt. Da $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y_1, \ldots, Y_m \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, folgt aus der Faltungseigenschaft der Normalverteilung, dass

$$\bar{X}_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \sim \mathrm{N}\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n}\right), \quad \bar{Y}_m := \frac{X_1 + \ldots + Y_m}{m} \sim \mathrm{N}\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m}\right).$$

Ein natürlicher Schätzer für $\mu_1 - \mu_2$ ist gegeben durch

$$\bar{X}_n - \bar{Y}_m \sim \mathrm{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right).$$

Indem der Erwartungswert subtrahiert und durch die Standardabweichung geteilt wird, erhält man eine standardnormalverteilte Zufallsvariable:

$$\frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim \mathrm{N}(0, 1).$$

Es gilt also, dass

$$\mathbb{P}_{\mu_1, \mu_2}\left[z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha \ \text{ für alle } \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Normalverteilung können wir $z = z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{\alpha}{2}}$ definieren. Umgeformt nach $\mu_1 - \mu_2$ erhält man das Konfidenzintervall

$$\left[\bar{X}_n - \bar{Y}_m - z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}},\ \bar{X}_n - \bar{Y}_m + z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right].$$

Fall 2: Konfidenzintervall für $\mu_1 - \mu_2$ bei unbekannten aber gleichen σ_1^2 und σ_2^2. Seien nun σ_1^2 und σ_2^2 unbekannt. Um das Problem zu vereinfachen, werden wir annehmen, dass σ_1^2 und σ_2^2 gleich sind, d. h. $\sigma^2 := \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Schritt 1. Genauso wie in Fall 1 gilt

$$\frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim \mathrm{N}(0, 1).$$

Leider können wir das nicht zur Konstruktion eines Konfidenzintervalls für $\mu_1 - \mu_2$ direkt verwenden, denn σ ist unbekannt. Wir werden deshalb σ schätzen.

SCHRITT 2. Ein Schätzer für σ^2, der nur auf der ersten Stichprobe basiert, ist gegeben durch

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Analog gibt es einen Schätzer für σ^2, der nur auf der zweiten Stichprobe basiert:

$$S_Y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} (Y_j - \bar{Y}_m)^2.$$

Für diese Schätzer gilt

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}, \qquad \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1}.$$

Bemerke, dass diese zwei χ^2–verteilten Zufallsvariablen unabhängig sind. Somit folgt

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} + \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n+m-2}.$$

Betrachte nun folgenden Schätzer für σ^2, der auf beiden Stichproben basiert:

$$S^2 = \frac{1}{n+m-2} \left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 + \sum_{j=1}^{m} (Y_j - \bar{Y}_m)^2 \right) = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}.$$

Somit gilt

$$\frac{(n+m-2)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n+m-2}.$$

Der Erwartungswert einer χ^2_{n+m-2}–verteilten Zufallsvariable ist $n + m - 2$. Daraus folgt insbesondere, dass S^2 ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2 ist, was die Wahl der Normierung $1/(n + m - 2)$ erklärt.

SCHRITT 3. Aus Schritt 1 und Schritt 2 folgt, dass

$$\frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{\frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2} \frac{(n+m-2)S^2}{\sigma^2}}} \sim t_{n+m-2}.$$

Dabei haben wir benutzt, dass der Zähler und der Nenner des obigen Bruchs unabhängig voneinander sind. Das folgt aus der Tatsache, dass S_X^2 und $\bar{X}_n$ sowie S_Y^2 und $\bar{Y}_n$ unabhängig voneinander sind, sowie aus der Tatsache, dass die Vektoren (X, S_X^2) und (Y, S_Y^2) unabhängig voneinander sind. Somit gilt

$$\mathbb{P}_{\mu_1,\mu_2,\sigma^2} \left[t_{n+m-2,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \le t_{n+m-2,1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha \text{ für alle } \mu_1, \mu_2, \sigma^2.$$

Wegen der Symmetrie der t–Verteilung gilt $t := t_{n+m-2,1-\frac{\alpha}{2}} = -t_{n+m-2,\frac{\alpha}{2}}$. Umgeformt nach $\mu_1 - \mu_2$ ergibt sich folgendes Konfidenzintervall für $\mu_1 - \mu_2$ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$:

$$\left[\bar{X}_n - \bar{Y}_m - S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\,t,\ \bar{X}_n - \bar{Y}_m + S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\,t\right].$$

Fall 3: Konfidenzintervall für σ_1^2/σ_2^2 bei unbekannten μ_1 und μ_2. Seien also μ_1 und μ_2 unbekannt. Wir konstruieren ein Konfidenzintervall für σ_1^2/σ_2^2. Die natürlichen Schätzer für σ_1^2 und σ_2^2 sind gegeben durch

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2, \quad S_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_j - \bar{Y}_m)^2.$$

Es gilt

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n-1}, \quad \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{m-1}$$

und diese beiden Zufallsvariablen sind unabhängig. Es folgt, dass

$$\frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} = \frac{\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{1}{n-1}}{\frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_2^2}\cdot\frac{1}{m-1}} \sim F_{n-1,m-1}.$$

Wir bezeichnen mit $F_{n-1,m-1,\alpha}$ das α–Quantil der $F_{n-1,m-1}$–Verteilung. Deshalb gilt, dass

$$\mathbb{P}_{\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left[F_{n-1,m-1,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} \le F_{n-1,m-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha \text{ für alle } \mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2 > 0.$$

Somit ergibt sich folgendes Konfidenzintervall für σ_1^2/σ_2^2 zum Konfidenzniveau $1-\alpha$:

$$\left[\frac{1}{F_{n-1,m-1,1-\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{S_X^2}{S_Y^2},\ \frac{1}{F_{n-1,m-1,\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{S_X^2}{S_Y^2}\right].$$

Fall 4: Konfidenzintervall für σ_1^2/σ_2^2 bei bekannten μ_1 und μ_2. Ähnlich wie in Fall 3 (Übungsaufgabe).

Zum Schluss betrachten wir ein Beispiel, bei dem es sich nur scheinbar um ein Zweistichprobenproblem handelt.

Beispiel 9.5.3 (Verbundene Stichproben). Bei einem Psychologietest füllen n Personen jeweils einen Fragebogen aus. Die Fragebögen werden ausgewertet und die Ergebnisse der Personen mit $X_1,\ldots,X_n$ notiert. Nach der Therapiezeit werden von den gleichen Personen die Ergebnisse mit $Y_1,\ldots,Y_n$ festgehalten. In diesem Modell gibt es zwei Stichproben, allerdings sind die Annahmen des Zweistichprobenmodells hier nicht plausibel. Es ist nämlich klar, dass X_1 und Y_1 abhängig sind, denn beide Ergebnisse gehören zu derselben Person. Allgemeiner sind X_i und Y_i abhängig. Eine bessere Vorgehensweise bei diesem Problem ist diese. Wir betrachten die Zuwächse $Z_i = Y_i - X_i$. Diese können wir als unabhängige Zufallsvariablen $Z_1,\ldots,Z_n \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ modellieren. Dabei spiegelt μ den mittleren Therapieerfolg wider. Das Konfidenzintervall für μ wird wie bei einem Einstichprobenproblem gebildet.