Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Sommersemester 2013
25. Juni 2013

Stochastik I (Statistik)

Übungsblatt 10

Abgabe: 02. Juli 2013

Hinweis: Bitte zu zweit abgeben!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

In zwei Städten wurden 22 Einwohner nach ihrem Einkommen (in 1000 Euro) gefragt. Von diesen 22 Personen wohnen 9 in der ersten Stadt und 13 in der zweiten Stadt. Es ergab sich die folgende Tabelle:

Stadt 1:	2.3	1.7	2.0	3.3	1.9	1.8	3.1	2.5	2.7				
Stadt 2:	1.2	1.0	3.0	2.5	1.6	1.7	3.3	3.7	1.2	2.3	2.7	2.9	1.7

Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 für die Differenz der mittleren Einkommen in diesen Städten an. Sie können annehmen, dass die Normalverteilungsannahme für das Einkommen gerechtfertigt ist.
Hinweis: Einige t-Quantile:
$t_{500,0.75} = 0.675,\ t_{22,0.975} = 2.074,\ t_{3,0.99} = 4.541,\ t_{13,0.75} = 0.694,\ t_{20,0.975} = 2.086,$
$t_{12,0.875} = 1.209,\ t_{20,0.95} = 1.725,\ t_{22,0.95} = 1.717,\ t_{9,0.975} = 2.262.$

Aufgabe 2 $(3 + 3$ Punkte)

Es seien n Geräte gleicher Bauart gegeben. Die Lebensdauer des Geräts i werde mit einer Zufallsvariable X_i modelliert. Dabei seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\theta > 0$. Es soll ein Konfidenzintervall für die erwartete Lebensdauer $\frac{1}{\theta}$ bestimmt werden.

(a) Zeigen Sie, dass $2n\theta\bar{X}_n$ eine χ^2-Verteilung mit $2n$ Freiheitsgraden hat.

(b) Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ für $\frac{1}{\theta}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit der Dichte $h_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}\mathbb{1}_{x\geq\theta}$, wobei $\theta \in \mathbb{R}$ der unbekannte Parameter sei. Als Schätzer für θ betrachten wir $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Finden Sie für ein gegebenes $\alpha \in (0, 1)$ Zahlen p und q (die nicht von θ abhängen) mit

$$\mathbb{P}_\theta[\theta < Y + p] = \mathbb{P}_\theta[\theta > Y + q] = \frac{\alpha}{2} \text{ für alle } \theta \in \mathbb{R}.$$

Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ für θ.

Aufgabe 4 $(2 + 5$ Punkte)

(a) Für jedes $r \in \mathbb{N}$ sei Z_r eine χ^2-verteilte Zufallsvariable mit r Freiheitsgraden. Zeigen Sie, dass

$$\frac{Z_r - r}{\sqrt{2r}} \xrightarrow[r\to\infty]{d} N(0, 1).$$

(b) Für $\alpha \in (0,1)$ seien z_α und $\chi^2_{r,\alpha}$ die α-Quantile der Standardnormalverteilung $N(0,1)$ bzw. der χ^2_r-Verteilung. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\chi^2_{r,\alpha} - r}{\sqrt{2r}} = z_\alpha.$$