Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Sommersemester 2013
09. Juli 2013

Stochastik I (Statistik)

Übungsblatt 12

Keine Abgabe! Besprechung am 16. Juli in der Übung.

Aufgabe 1

Es sei $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ eine Realisierung von $(X_1, \dots, X_n)$, wobei $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und auf $(\theta, \theta + 1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen sind. Dabei sei $\theta \in \mathbb{R}$ der unbekannte Parameter.

(a) Schätzen Sie θ mit der Momentenmethode.

(b) Schätzen Sie θ mit der Maximum–Likelihood–Methode. (Geben Sie alle Stellen an, wo die Likelihood–Funktion maximal ist).

Aufgabe 2

Es seien $X_1, \dots, X_n$ und $Y_1, \dots, Y_m$ Zufallsvariablen mit folgenden Eigenschaften:

1) $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ sind unabhängig.

2) $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{N}(0, \sigma_1^2)$.

3) $Y_1, \dots, Y_m \sim \mathrm{N}(0, \sigma_2^2)$.

Testen Sie die Nullhypothese H_0 gegen die Alternativhypothese H_1 zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$, wenn

(a) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ und $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

(b) $H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ und $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$.

Aufgabe 3

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und Poisson–verteilt mit Parameter $\theta > 0$. Zeigen Sie, dass die Schätzer $\bar{X}_n$ und S_n^2 erwartungstreu für θ sind. Welcher Schätzer hat eine kleinere Varianz?

Aufgabe 4

Seien $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{N}(0, \theta)$, wobei $\theta > 0$ der unbekannte Parameter ist. Zeigen Sie, dass die Statistik $T = \sum_{i=1}^n X_i^2$ suffizient ist.

Aufgabe 5

Wir betrachten ein Portfolio aus $n = 1000$ Versicherungsverträgen. Innerhalb eines Jahres haben die Verträge aus diesem Portfolio insgesamt 2500 Schäden verursacht. Die Versicherung nimmt an, dass die Anzahl der Schäden, die jeder Vertrag aus diesem Portfolio innerhalb eines Jahres verursacht, Poisson–verteilt mit Parameter $\theta > 0$ ist. Außerdem wird angenommen, dass die einzelnen Verträge unabhängig voneinander sind. Man gebe ein asymptotisches Konfidenzintervall zum Niveau $\alpha = 0.95$ für θ an. Sie können den Satz von Slutsky benutzen, um Ihre Berechnungen zu vereinfachen.

Aufgabe 6

Gegeben sei die Stichprobe

$$+1.59, -1.21, -0.31, -3.1, +2.12, +0.95, +0.56.$$

Es wird angenommen, dass diese Stichprobe eine Realisierung von unabhängigen und $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$–verteilten Zufallsvariablen ist, wobei keine Informationen über μ und σ^2 vorliegen. Geben Sie ein Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$ an.

Aufgabe 7

Unter den ersten $n = 10.000.000$ Dezimalstellen der Zahl π gibt es genau 999.440 Nullen. Testen Sie mit einem asymptotischen Test die Hypothese H_0 : Die Häufigkeit von 0 ist gleich 1/10 gegen die Hypothese H_1: Die Häufigkeit von 0 ist ungleich 1/10. Das Niveau sei $\alpha = 0.05$.

Aufgabe 8

Bei einem gegebenen Wert des Parameters $\mu \in \mathbb{R}$ seien die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und normalverteilt mit Parametern $(\mu, 1)$. Dabei wird für μ eine a–priori–Normalverteilung mit (deterministischen und bekannten) Parametern $\mu_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma_0^2 > 0$ angenommen. Man beobachtet eine Realisierung $(x_1, \ldots, x_n)$ von $(X_1, \ldots, X_n)$. Bestimmen Sie die a–posteriori–Verteilung von μ und den Bayes–Schätzer $\hat{\mu}_{\text{Bayes}}$.