Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Sommersemester 2013
16. April 2013

Stochastik I

Übungsblatt 1

Abgabe: 23. April 2013

Hinweis: Bitte die Übungsblätter zu zweit abgeben!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz der Stichprobe

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad \ldots, \quad x_n = n.$$

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)

Es sei

$$s_n^2(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \right)^2$$

die Stichprobenvarianz der Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$s_n^2(x_1 + b, \ldots, x_n + b) = s_n^2(x_1, \ldots, x_n).$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$s_n^2(ax_1, \ldots, ax_n) = a^2 s_n^2(x_1, \ldots, x_n).$$

Aufgabe 3 (4+2+3 Punkte)

Sei $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ eine Stichprobe. Sei $\bar{x}_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ das Stichprobenmittel.

(a) Beweisen Sie die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - b)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 + n(\bar{x}_n - b)^2 \text{ für jedes } b \in \mathbb{R}.$$

(b) Es sei $s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2$ die Stichprobenvarianz. Leiten Sie aus Teil (a) die Formel

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}_n^2 \right)$$

her.

(c) Für welchen Wert von b wird die Funktion

$$f(b) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - b)^2$$

minimal?

Bemerkung. In der Mechanik ist die Gleichung aus (a) als Satz von Steiner bekannt.