Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Sommersemester 2013
23. April 2013

Stochastik I

Übungsblatt 2

Abgabe: 30. April 2013

Hinweis: Bitte die Übungsblätter zu zweit abgeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bei der Messung der Körpergröße von 10 Personen ergaben sich folgende Werte

$$179, 177, 188, 195, 183, 183, 198, 188, 193, 189.$$

Bestimmen Sie den empirischen Mittelwert, die empirische Varianz, den Median und den Interquartilsabstand dieser Stichprobe.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ unabhängige und mit Parametern μ, σ^2 normalverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die Gammafunktion Γ und die Betafunktion B sind definiert durch

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Zeigen Sie, dass zwischen den beiden Funktionen der folgende Zusammenhang besteht:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ und schreiben Sie das Produkt der Integrale als ein doppeltes Integral.

Aufgabe 4 (4+2 Punkte)

Eine Zufallsvariable Z hat Betaverteilung mit Parametern $\alpha > 0$, $\beta > 0$, falls die Dichte von Z die folgende Form hat:

$$f_Z(t) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}, \quad \text{falls } t \in [0, 1],$$

und 0 sonst.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}Z = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Die Ordnungsstatistiken seien mit $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}X_{(i)} = \frac{i}{n+1} \text{ für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Hinweis zu (a): Sie können die Formel $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ ohne Beweis verwenden.