Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Sommersemester 2013
30. April 2013

Stochastik I (Statistik)

Übungsblatt 3

Abgabe: 07. Mai 2013

Hinweis: Bitte die Übungsblätter zu zweit abgeben!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Außerdem sei $\widehat{F}_n(t)$ die empirische Verteilungsfunktion von $X_1, \dots, X_n$. Berechnen Sie

$$n \cdot \operatorname{Cov}(\widehat{F}_n(t), \widehat{F}_n(s)) \text{ für } s, t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2 ($2 + 2$ Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariablen. Man schätze λ anhand einer Stichprobe $(x_1, \dots, x_n) \in (0, \infty)^n$

(a) mit der Momentenmethode;

(b) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

Aufgabe 3 ($3 + 3$ Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und auf dem Intervall $[\theta_1, \theta_2]$ gleichverteilte Zufallsvariablen, wobei $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ unbekannte Parameter mit $\theta_1 < \theta_2$ sind. Man schätze θ_1 und θ_2 anhand einer Stichprobe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

(a) mit der Momentenmethode;

(b) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

Aufgabe 4 ($2 + 3$ Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Sei $\widehat{F}_n(t)$ die empirische Verteilungsfunktion von $X_1, \dots, X_n$.

(a) Zeigen Sie, dass für jede beschränkte, messbare Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\int_0^1 f(x) d\widehat{F}_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{f.s.} \int_0^1 f(x) dx.$$

(b) Zeigen Sie, dass für jede beschränkte, messbare Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die nicht fast überall konstant ist, gilt, dass

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\int_0^1 f(x) d\widehat{F}_n(x) - \int_0^1 f(x) dx}{\sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx - \left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2}} \xrightarrow[n \to \infty]{d} Z \sim \mathrm{N}(0, 1).$$