Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Sommersemester 2013
07. Mai 2013

Stochastik I (Statistik)

Übungsblatt 4

Abgabe: 14. Mai 2013

Hinweis: Bitte die Übungsblätter zu zweit abgeben!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Berechne die Varianz $\operatorname{Var}(X_{(i)})$ der i-ten Ordnungsstatistik. Berechne außerdem für welches $i \in \{1, \ldots, n\}$ die $\operatorname{Var}(X_{(i)})$ maximal ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Eine Zufallsvariable hat Gammaverteilung mit Parametern $b > 0, \alpha > 0$, wenn ihre Dichte die folgende Darstellung hat:

$$h_{b,\alpha}(t) = \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-b\,t} \text{ für } t > 0$$

und 0, sonst. Dabei ist $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ die Gammafunktion. Schätzen Sie die unbekannten Parameter b und α mit Hilfe der Momentenmethode.

Aufgabe 3 ($3 + 3 + 4$ Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte $h_\theta(x)$, wobei $\theta \in \Theta$ ein unbekannter Parameter ist. Sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Realisierung von $X_1, \ldots, X_n$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer von θ, wenn

(a) $h_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$ für $x \in [0,1]$ und 0, sonst. Dabei ist $\Theta = (0, \infty)$.

(b) $h_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}$ für $x \geq \theta$ und 0, sonst. Dabei ist $\Theta = \mathbb{R}$.

(c) $h_\theta(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dabei ist $\Theta = \mathbb{R}$.

Wenn das Maximum der Likelihood-Funktion nicht eindeutig ist, geben Sie bitte alle Werte von θ an, die die Likelihood-Funktion maximieren.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Bei einem gegebenen Wert des Parameters $\lambda > 0$ seien die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und Poisson-verteilt mit Parameter λ. Dabei wird für λ eine a-priori-Gammaverteilung mit (deterministischen und bekannten) Parametern $b > 0$, $\alpha > 0$ angenommen. Man beobachtet nun eine Realisierung $(x_1, \ldots, x_n)$ von $(X_1, \ldots, X_n)$. Bestimmen Sie die a-posteriori-Verteilung von λ und den Bayes-Schätzer $\hat{\lambda}_{\text{Bayes}}$.