Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Sommersemester 2013
14. Mai 2013

Stochastik I (Statistik)

Übungsblatt 5

Abgabe: 21. Mai 2013

Hinweis: Bitte die Übungsblätter zu zweit abgeben!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die eine Bernoulli-Verteilung mit Parameter $p \in [0,1]$ haben. Ist der Schätzer

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n^2 = \left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \right)^2$$

ein erwartungstreuer Schätzer für den Parameter $\theta = p^2$?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $(x_1, \dots, x_n) \in (0, \infty)^n$ eine Realisierung von unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$, die eine inverse Gauß-Verteilung mit unbekannten Parametern $\mu > 0$ und $\lambda > 0$ haben, d.h. die Dichte von X_i sei

$$h_{\mu,\lambda}(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left\{ -\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x} \right\}, \quad x > 0.$$

Schätzen Sie μ und λ mit der Maximum-Likelihood-Methode. Sie können annehmen, dass nicht alle x_i gleich sind.

Aufgabe 3 ($6 + 3$ Punkte)

Es seien $(X_1, \dots, X_n)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die eine Gleichverteilung auf einem Intervall $[0, \theta]$ haben. Dabei ist $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter. Betrachten Sie die folgenden Schätzer für θ:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n) &= X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}, \\
\hat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n) &= X_{(n)} + X_{(1)} = \max\{X_1, \dots, X_n\} + \min\{X_1, \dots, X_n\}, \\
\hat{\theta}_3(X_1, \dots, X_n) &= \frac{n+1}{n} X_{(n)} = \frac{n+1}{n} \max\{X_1, \dots, X_n\}, \\
\hat{\theta}_4(X_1, \dots, X_n) &= 2\bar{X}_n = 2\, \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}.
\end{aligned}$$

(a) Bestimme den Bias von $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4$.

(b) Welcher Schätzer hat eine kleinere Varianz: $\hat{\theta}_3$ oder $\hat{\theta}_4$?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_i = \mu$ und $\operatorname{Var} X_i = \sigma^2$. Es bezeichne $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ die empirische Varianz. Zeigen Sie, dass S_n^2 ein stark konsistenter Schätzer für σ^2 ist, d.h.

$$S_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \sigma^2.$$