Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Sommersemester 2013
21. Mai 2013

Stochastik I (Statistik)

Übungsblatt 6

Abgabe: 28. Mai 2013

Hinweis: Bitte die Übungsblätter zu zweit abgeben!

Aufgabe 1 ($3+2+2+4$ Punkte)

Es sei $(x_1,\dots,x_n) \in (0,\infty)^n$ eine Realisierung von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1,\dots,X_n$ mit einer Log-Normalverteilung mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$. D.h. die Dichte der X_i sei

$$h_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \text{ für } x > 0,$$

und 0 für $x \le 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen $Y_i := \log X_i$ normalverteilt mit Parametern μ und σ^2 sind.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}X_i$ und $\mathbb{E}[X_i^2]$.

(c) Schätzen Sie μ und σ^2 mit der Momentenmethode.

(d) Schätzen Sie μ und σ^2 mit der Maximum-Likelihood-Methode.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es seien $X_1,\dots,X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit einer Dichte h_θ aus der Cauchy-Familie:

$$h_\theta(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x-\theta)^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

kein schwach konsistenter Schätzer für θ ist.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass die charakteristische Funktion der Cauchy-Verteilung mit Parameter θ gleich $\varphi(t) = e^{i\theta t - |t|}$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $X, X_1,\dots,X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit einer stetigen Verteilungsfunktion. Es seien $X_{(1)} < \ldots < X_{(n)}$ die Ordnungsstatistiken von $X_1,\dots,X_n$ (ohne Berücksichtigung von X). Berechnen Sie

$$\mathbb{P}[X < X_{(k)}]$$

für $k = 1,\dots,n$.