

Stochastik I (Statistik)

Übungsblatt 7

Abgabe: 4. Juni 2013

Hinweis: Bitte die Übungsblätter zu zweit abgeben!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte

$$h_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^2}, & x \geq \theta; \\ 0, & x < \theta, \end{cases}$$

wobei $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter sei. Sei $(x_1, \dots, x_n) \in (0, \infty)^n$ eine Realisierung von (X_1, \dots, X_n) . Schätzen Sie θ mit der Maximum-Likelihood-Methode.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \text{Poi}(\theta)$, wobei $\theta > 0$ unbekannt sei. Zeigen Sie, dass die Statistik $T(X_1, \dots, X_n) = X_1 + \dots + X_n$ suffizient ist.

Aufgabe 3 (3 + 3 Punkte)

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit

- (a) $X_i \sim \text{Poi}(\theta)$, wobei $\theta > 0$ unbekannt ist.
- (b) $X_i \sim N(\theta, \sigma^2)$, wobei $\theta \in \mathbb{R}$ unbekannt ist und $\sigma^2 > 0$ bekannt sei.

Berechnen Sie die Fisher-Information $I(\theta)$ und zeigen Sie, dass in beiden Fällen der Schätzer \bar{X}_n erwartungstreu für θ und Cramér-Rao-effizient ist.

Aufgabe 4 (1 + 3 + 4 Punkte)

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \text{Exp}(\theta)$, wobei $\theta > 0$ unbekannt sei.

- (a) Zeigen Sie, dass \bar{X}_n ein erwartungstreuer Schätzer für $1/\theta$ ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $1/\bar{X}_n$ kein erwartungstreuer Schätzer für θ ist und bestimmen Sie eine Konstante c (in Abhängigkeit von n), so dass c/\bar{X}_n ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.
- (c) Zeigen Sie, dass c/\bar{X}_n nicht Cramér-Rao-effizient ist.