Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Sommersemester 2013
4. Juni 2013

Stochastik I (Statistik)

Übungsblatt 8

Abgabe: 11. Juni 2013

Hinweis: Bitte die Übungsblätter zu zweit abgeben!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Verteilungsfamilien jeweils eine Exponentialfamilie sind:

(a) $\{\mathrm{Exp}(\theta) : \theta > 0\}$.

(b) $\{\mathrm{Poi}(\theta) : \theta > 0\}$.

(c) $\{\mathrm{Geo}(\theta) : \theta \in (0, 1)\}$.

Aufgabe 2 ($2 + 4$ Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, die auf $(\theta, \theta + 2)$ (einem Intervall der Länge 2) gleichverteilt sind, wobei $\theta \in \mathbb{R}$ der zu schätzende Parameter sei. Definiere die Schätzer $\hat{\theta}_1 = X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ und $\hat{\theta}_2 = \bar{X}_n - 1$ für θ.

(a) Untersuchen Sie die beiden Schätzer auf Erwartungstreue.

(b) Untersuchen Sie die beiden Schätzer auf schwache Konsistenz.

Aufgabe 3 ($3 + 3$ Punkte)

Seien X_1, X_2, X_3 unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathrm{Bern}(\theta)$, $\theta \in (0, 1)$.

(a) Ist die Statistik $T(X_1, \ldots, X_3) = X_1 + 2X_2 + X_3$ suffizient?

(b) Ist die Statistik $S(X_1, \ldots, X_3) = X_1 + 10X_2 + 100X_3$ suffizient?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, die auf einem Intervall (θ_1, θ_2) gleichverteilt sind. Dabei seien $\theta_1 \in \mathbb{R}$ und $\theta_2 \in \mathbb{R}$ die zu schätzenden Parameter mit $\theta_1 < \theta_2$. Zeigen Sie, dass die Statistik

$$T(X_1, \ldots, X_n) = (X_{(1)}, X_{(n)}) = \left(\min_{i=1,\ldots,n} X_i, \max_{i=1,\ldots,n} X_i \right)$$

suffizient ist.