Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Judith Schmidt

Sommersemester 2013
11. Juni 2013

Stochastik I (Statistik)

Übungsblatt 9

Abgabe: 25. Juni 2013

Hinweis: Abgabe erst in zwei Wochen!

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Man würfelt zweimal mit einem fairen Würfel. Es seien X_1 und X_2 die Augenzahlen und $Y := \max\{X_1, X_2\}$ die größere Augenzahl. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X_1|Y]$.

Hinweis: Das Ergebnis ist keine Zahl, sondern eine Zufallsvariable.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]] = \mathbb{E}X.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Definition der bedingten Erwartung.

Aufgabe 3 $(3+3$ Punkte$)$

(a) Eine Zufallsvariable hat eine Gammaverteilung mit Parametern $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, falls ihre Dichte die Form

$$h_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$$

hat. Zeigen Sie, dass $\{h_{\alpha,\lambda} : \alpha > 0, \lambda > 0\}$ eine zweiparametrige Exponentialfamilie ist. Geben Sie eine suffiziente und vollständige Statistik mit Werten in $\mathbb{R}^2$ an.

(b) Eine Zufallsvariable hat eine Betaverteilung mit Parametern $\alpha > 0$, $\beta > 0$, falls ihre Dichte die Form

$$h_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \mathbb{1}_{0<x<1}$$

hat. Zeigen Sie, dass $\{h_{\alpha,\beta} : \alpha > 0, \beta > 0\}$ eine zweiparametrige Exponentialfamilie ist. Geben Sie eine suffiziente und vollständige Statistik mit Werten in $\mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 4 $(3+4$ Punkte$)$

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit einer Exponentialverteilung mit Parameter $\theta > 0$.

(a) Betrachten wir $\mu := 1/\theta$ als Parameter. Zeigen Sie, dass $\bar{X}_n$ ein Cramér–Rao–effizienter Schätzer für μ ist. (Somit ist $\bar{X}_n$ der beste erwartungstreue Schätzer für μ).

(b) Nun betrachten wir wieder θ als Parameter. Konstruieren Sie den besten erwartungstreuen Schätzer für θ.

Aufgabe 5 $(1 + 1 + 3 + 3 + 3$ Punkte)

In einer Urne liegen k Bälle, die mit $1, \ldots, k$ nummeriert sind. Dabei ist die Zahl $k \in \mathbb{N}$ unbekannt und soll geschätzt werden. Man zieht aus der Urne n Bälle mit Zurücklegen und notiert die Nummern dieser Bälle: $x_1, \ldots, x_n$.

(a) Schätzen Sie k mit der Momentenmethode.

(b) Schätzen Sie k mit der Maximum-Likelihood-Methode.

(c) Zeigen Sie, dass die Statistik $T := \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ suffizient ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Statistik $T := \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ vollständig ist.

(e) Konstruieren Sie den besten erwartungstreuen Schätzer für k.

Bemerkung: Bei dieser Aufgabe müssen die Werte des Schätzers nicht in $\{0, 1, \ldots\}$ liegen. Werte in $(0, \infty)$ seien erlaubt.