ulm university universität uulm

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2013

Zufallsfelder II
Übungsblatt 4

Besprechung: Freitag, 14. Juni 2013, 12:30 Uhr

Aufgabe 1

(a) Sei $W = \{W(t),\, t \in [0,1]\}$ der Wiener Prozess. Zeige, dass es Konstanten $\alpha, c > 0$ gibt, sodass

$$\sqrt{E(|W(s) - W(t)|^2)} \leq \frac{c}{|\log|s-t||^{1/2+\alpha}}$$

für alle $s,t:\ |s-t| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0$.

(b) Sei $W = \{W(t),\, t \in [0,1]^d\}$ das Brownian sheet[1]. Zeige, dass

$$E(|W(s) - W(t)|^2) \leq 2d|t-s|, \quad s,t \in [0,1]^d.$$

(c) Wie kann man aus a) (bzw. b)) die Stetigkeit und Beschränktheit (mit Wahrscheinlichkeit eins) des zugrundeliegenden Wiener Prozesses (bzw. Brownian sheets) folgern?

Aufgabe 2

Zeige[2] die Gauß'sche Ungleichung:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\phi(x) < \Psi(x) < \frac{1}{x} \cdot \phi(x), \quad x > 0,$$

wobei $\phi(x)$ die Dichtefunktion und $\Psi(x) = \int_x^\infty \phi(u)\,du$ die Tailfunktion einer Standardnormalverteilten Zufallsvariable seien.

Aufgabe 3

Sei $X = \{X(t),\ t \in [0,T]\}$ ein stationärer Gaußscher Prozess mit C^1-Pfaden und

$$\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu_X(dx),$$

wobei μ_X das Spektralmaß von X bezeichne. Zeige[3]:

(a) $EX'(t) = 0$ und $Cov(X'(s), X'(t)) = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{i(s-t)x} \mu_X(dx)$.

(b) Gaußsche Rice-Formel: Falls $N_u(0,T) = |\{t \in [0,T];\ X(t) = u\}|$, so gilt

$$EN_u(0,T) = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\pi} T e^{-\frac{u^2}{2}}$$

für $u \in \mathbb{N}$.

[1] Das Brownian sheet ist definiert durch

$$W(t) = \widetilde{W}([0,t]),$$

wobei $t \in \mathbb{R}^d$ und $\widetilde{W}$ ein Gaußsches weißes Rauschen mit $Cov(\widetilde{W}([0,s]), \widetilde{W}([0,t])) = \nu([0,s] \cap [0,t])$ sei und ν das Lebesgue-Maß bezeichne.

[2] Hinweis: Für die untere Schranke verwende die Substitution $u \mapsto x + v/x$ und die Ungleichung $e^{-z} > 1 - z,\ z > 0$.

[3] Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass $X'(t)$ normalverteilt ist und $X(t),\ X'(t)$ unabhängig sind $\forall\ t \in [0,T]$.