Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth SS 2013

Zufallsfelder II
Übungsblatt 5

Besprechung: Freitag, 5. Juli 2013, 12:30 Uhr

Aufgabe 1

Sei $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ eine zufälliges Gaußsches Polynom, d.h.

$$X(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$$

mit $a_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,1)$ Zeige, dass dann

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P(\sup_{t\in[0,T]} X(t) \geq u)}{\psi(u/\sigma_T)} = 1,$$

für $T > 0$.

Aufgabe 2

Sei $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ mit $X(0) = 0$ ein zentrierter, Gaußscher Prozess mit stationären und isotropen Zuwächsen, d.h. die Verteilung von $X(t+s) - X(s)$ hänge nur von $|t|$ ab. Definiere $p^2(t) := E(X(t+s) - X(s))^2$. Außerdem gelten folgende Bedingungen:

1.) p^2 ist konvex

2.) $\lim_{t\to 0} \frac{p^2(t)}{|t|} = 0$.

Zeige[1], dass dann gilt

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P(\sup_{t\in[0,T]} X(t) \geq u)}{\psi(u/\sigma_T)} = 1,$$

wobei $T > 0$ und $\sigma_T = \sup_{t\in[0,T]} EX^2(t) = EX^2(T)$.

[1] Um den Satz von Talagrand anwenden zu können, genügt es hier zu zeigen (warum?), dass

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{E(\sup_{0\leq t\leq \delta^2} |X(t)|)}{\delta} = 0.$$

Verwende dazu die folgende Ungleichung:

$$E(\sup_{t\in\bar{T}} |X(t)|) \leq K \cdot \int_0^{p(\delta^2/2)} \sqrt{-\log(u)}\, dp(u),$$

mit p wie in der Aufgabe, einer Konstanten K und einer kompakten Menge $\bar{T}$.