Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2013

Zufallsfelder II
Übungsblatt 2

Besprechung: Freitag, 17. Mai 2013, 12:15 Uhr

Aufgabe 1

Für Funktionen $C \in L_2([a,b]\times[a,b])$ definiert man den Fredholm-Operator $A_C : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$ durch

$$A_C f(s) = \int_a^b C(s,t) f(t) dt, \quad f \in L_2([a,b]).$$

Die Funktion $C = C(s,t)$ heißt Integralkern von A_C. Zeige, dass der Fredholm-Operator kompakt ist.

Hinweis: Sind X, Y zwei Banachräume und $T \in L(X,Y)$, so ist T kompakt, falls es eine Folge $\{T_n\}$ von stetigen, linearen Operatoren mit endlich dimensionalem Bild gibt, sodass $||T_n - T|| \to 0$. Daraus lässt sich die Behauptung folgern, indem man C durch Treppenfuntionen mit „Rechtecksstufen“ approximiert.

Aufgabe 2

Sei $T \in \mathbb{N}$ und $X = \{X(t),\ t \in [0,T]\}$ ein reellwertiger Prozess auf $[0,T]$ mit $EX(t) = 0$ und $EX^2(t) < \infty, \forall\, t \in [0,T]$. Die folgenden Funktionen C sind stets Kovarianzfunktionen.

(a) Sei $C(s,t) = \cos(2\pi(t-s))$. Zeige, dass die Karhunen-Loève-Entwicklung aus genau zwei Summanden besteht und bestimme diese.

(b) Sei $C(s,t) = (1 - |t-s|)\mathbb{1}_{\{0 \le t-s \le 2T\}}$. Bestimme die Karhunen-Loève-Entwicklung.

(c) Sei $C(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \cos(n\frac{2\pi}{T}(t-s))$. Bestimme die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Fredholm-Operators aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3

Ein stochastischer Prozess $B = \{B(t), t \in [0,1]\}$ heißt *Brownsche Brücke*, falls

- die gemeinsame Verteilung von $B(t_1), B(t_2), ..., B(t_n),\ t_1, ..., t_n \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}$ Gauß 'sch ist mit $E(B(t)) = 0$ für alle $t \in [0,1]$,
- die Kovarianzfunktion von B gegeben ist durch
$$C(s,t) = \min\{s,t\} - st,$$
- die Pfade von B fast sicher stetig sind.

(a) Berechne die Karhunen-Loève-Entwicklung der Brownschen Brücke.

(b) Zeige, dass $B(t) \overset{d}{=} W(t) - tW(1) \overset{d}{=} (1-t)W\left(\frac{t}{1-t}\right),\ t \in [0,1]$, wobei $\{W(t),\ t \in [0,1]\}$ die Brownsche Bewegung bezeichne.

(c) Finde eine Darstellung der Brownschen Brücke basierend auf der Karhunen-Loève Entwicklung der Brownschen Bewegung. Vergleiche diese mit der Karhunen-Loève Entwicklung der Brownschen Brücke.