Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2013

Zufallsfelder II
Übungsblatt 1

Besprechung: Freitag, 3. Mai 2013, 12:15 Uhr

Aufgabe 1

Zeige, dass der Wiener-Prozess $W = \{W(t),\ t \in [0, 2\pi]\}$ die folgende Darstellung besitzt:

$$W(t) \stackrel{f.s.}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-ikt}}{ik} Z_k, \quad t \in [0, 2\pi],$$

wobei Z_k unkorrelierte, zentrierte Zufallsvariablen sind mit $Var(Z_k) = 1$, $\forall\ k$ und die Reihe im mittleren quadratischen Sinne konvergiert $\forall\ t \in [0, 2\pi]$. Für $k = 0$ setze $(1 - e^{-ikt})/ik := t$. Gehe dabei wie folgt vor:

1.) Zeige, dass die Kovarianzfunktion $C(s, t)$ von W eine Integraldarstellung wie im Theorem von Karhunen besitzt mit $E = \mathbb{R}$ und ν das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$.

2.) Verwende die Parsevalidentität um zu zeigen, dass $C(s, t)$ eine Integraldarstellung wie im Theorem von Karhunen besitzt mit $E = \mathbb{Z}$ und ν das Zählmaß auf $\mathbb{Z}$.

3.) Wende das Theorem von Karhunen an.

Aufgabe 2

Zeige, dass der Wiener-Prozess $W = \{W(t),\ t \in [0, 1]\}$ die folgende Darstellung besitzt:

$$W(t) \stackrel{f.s.}{=} \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t) Z_k, \quad t \in [0, 1],$$

wobei $S_k(t)$, $t \in [0, 1]$, $k \in \mathbb{Z}$ die Schauderfunktionen und Z_k unkorrelierte, zentrierte Zufallsvariablen mit $Var(Z_k) = 1$, $\forall\ k$ seien und die Reihe im mittleren quadratischen Sinne konvergiert $\forall\ t \in [0, 1]$. Gehe dabei wie in Aufgabe 1 vor.