Angewandte Stochastik I
SS 2014

Dr. Markus Kunze
Dr. Jürgen Kampf

3. Übungsblatt
Abgabe: 6. Juni, 10:15

Aufgabe 1: Bedingte Wahrscheinlichkeiten
(3 Punkte)

Seien A, B und C Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 0,3$, $\mathbb{P}(B) = 0,4$ und $\mathbb{P}(C) = 0,5$. Ferner seien A und B disjunkt, A und C unabhängig und $\mathbb{P}(B|C) = 0,5$. Bestimme $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

Aufgabe 2: Bedingte Wahrscheinlichkeiten
(2 Punkte)

Eine Fußballmannschaft hat eine Siegchance von 75% je Spiel, falls ihr Kapitän in guter Form ist. Falls ihr Kapitän nicht gut in Form ist, dann betrage ihre Siegchance nur 40%. Bei 70% aller Spiele seiner Mannschaft sei der Kapitän in guter Form. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) die Mannschaft ein Spiel gewinnt,

b) der Kapitän bei einem Spiel in guter Form ist, wenn die Mannschaft das Spiel nicht gewinnt.

Aufgabe 3: Die Reihenfolge von Buchstaben
(2 Punkte)

An einem Wegweiser nach Essen sind die 5 Buchstaben E, S, S, E und N einzeln befestigt. Bei einer Erschütterung fallen zwei der fünf Buchstaben herunter, wobei alle möglichen Kombinationen gleichwahrscheinlich seien. Ein Analphabet befestigt diese wieder am Schild. Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht nun wieder "ESSEN" auf dem Schild, wenn zwar sicher gestellt ist, dass die Buchstaben richtig orientiert (also nicht auf dem Kopf oder dergleichen) befestigt werden, aber rein zufällig ausgewählt wird, welcher Buchstabe an welchen der beiden freien Plätze gehängt wird.

Aufgabe 4: Busse, die zwar überfüllt sind, das aber unabhängig voneinander
(1,5+1,5+1=4 Punkte)

An der Haltestelle "Multscherschule" fahren abwechselnd Busse der Linien 3 und 5 zur Universität ab. Zu den Stoßzeiten sind die Busse jedoch so voll, dass nicht alle tatsächlich halten. Es sei bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bus der Linie 3 an der Haltestelle Multscherschule hält, 1/3 ist, während die Wahrscheinlichkeit bei der Linie 5 eine Konstante $p \in (0, 1)$ ist. Weiter nehmen wir an, dass die Ereignisse, dass die Busse halten, voneinander unabhängig sind.
Du kommst an der Haltestelle Multscherschule an und beschließt, den nächsten Bus, der an der Haltestelle anhält, zur Uni zu nehmen. Laut Fahrplan ist der nächste Bus ein Bus der Linie 3.

a) Bestimme für $k \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_k : "Der k-te ankommende Bus ist der erste, der anhält". *Hinweis: Unterscheide die Fälle, dass $k = 2l$ gerade ist und dass $k = 2l - 1$ ungerade ist.*

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommst Du mit einem Bus der Linie 5 an der Uni an? *Hinweis: Für $x \in (-1, 1)$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$.*

c) Für welchen Wert von p ist es gleich wahrscheinlich, mit der Linie 3 und der Linie 5 an der Uni anzukommen.

Aufgabe 5: Verteilungsfunktionen
(1+2=3 Punkte)

Gib die Verteilungsfunktionen folgender Zufallsvariablen an und skizziere sie:

a) X, wobei $\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(X = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{6}$

b) $X^2 + 1$

Aufgabe 6: Eigenschaften von Verteilungsfunktionen
(2 Punkte)

Sei $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Zeige:

a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $\mathbb{P}(X \in [a, b]) = F(b) - F(a-)$.

b) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{P}(X < x) = F(x-)$.

Hinweis: $F(x-)$ bezeichnet den linksseitigen Grenzwert von F an der Stelle x.