Angewandte Stochastik I
SS 2014

Dr. Markus Kunze
Dr. Jürgen Kampf

4. Übungsblatt
Abgabe: 20. Juni, 10:15

Aufgabe 1: Diskrete Verteilungen in Diktaten
(4 Punkte)

Die Klasse, in die Jonas geht, schreibt heute ein Diktat mit 150 verschiedenen Wörtern. Jonas schreibt diese unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit 97% richtig. Berechne die Wahrscheinlichkeit,

a) dass das dritte Wort das erste ist, das Jonas richtig schreibt.

b) dass das fünfte Wort das erste ist, das Jonas falsch schreibt.

c) dass Jonas höchstens zwei Wörter falsch schreibt, exakt.

d) dass Jonas höchstens zwei Wörter falsch schreibt, mit der Poisson-Approximation (Proposition 2.2.1).

Aufgabe 2: Geometrische Verteilung
(1+2+1+1=5 Punkte)

Die Zufallsvariable X sei geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$, d.h.

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

a) Bestimme die Verteilungsfunktion von X. (Wie immer: Gib sie explizit, d.h. ohne Summen, bei denen die Zahl der Sumanden beliebig groß werden kann, an.) Beachte: Der Definitionsbereich der Verteilungsfunktion ist $\mathbb{R}$, nicht $\mathbb{N}$.

b) Zeige die Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung, d.h. zeige, dass

$$P(X = n + k | X > n) = P(X = k), \text{ für } n, k = 1, 2, \ldots$$

c) Bestimme $P(k \leq X \leq l)$ für $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $k \leq l$.

d) Bestimme $\mathbb{P}(X \text{ ist durch 3 teilbar})$.

Aufgabe 3: Die Binomial-Verteilung approximiert die hypergeometrische Verteilung
(3 Punkte)

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$ fest und seien $(m_l)_{l\in\mathbb{N}}$ und $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ Folgen mit

$$\lim_{l\to\infty} m_l = \lim_{n\to\infty} n_l = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{l\to\infty} \frac{m_l}{m_l + n_l} = p.$$

Zeige: Die $\mathsf{b}_{k,p}$-Verteilung approximiert die $\mathsf{hg}_{m_l,n_l,k}$-Verteilung, d.h. für $X_l \sim \mathsf{hg}_{m_l,n_l,k}$ und $Y \sim \mathsf{b}_{k,p}$ gilt

$$\lim_{l\to\infty} \mathbb{P}(X_l = j) = \mathbb{P}(Y = j), \qquad j = 0, \ldots, k.$$

Hinweis: Folgende Aussage darf ohne Beweis verwendet werden: Sind $(a_l)_{l\in\mathbb{N}}$ und $(b_l)_{l\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{l\to\infty} a_l/b_l = c \in [0,\infty)$, so gilt für alle Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$, dass

$$\lim_{l\to\infty} \frac{a_l - r}{b_l - s} = c.$$

Aufgabe 4: Absolutstetige Verteilungen
(2+2=4 Punkte)
Gegeben seien die Dichten

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{falls } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{falls } x \in [0,d] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimme c und d so, dass f und g tatsächlich Dichten sind.

b) Bestimme für eine Zufallsvariable X mit Dichte f die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(X \le \tfrac{1}{2}), \quad \mathbb{P}(X = \tfrac{1}{2}), \quad \mathbb{P}(X \in [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}]), \quad \mathbb{P}(X \in (\tfrac{1}{3}, 2)).$$

Aufgabe 5: Die Inversionsmethode
(1+1+2+2=6 Punkte)
Sei F eine Verteilungsfunktion. Dann heißt die Funktion

$$F^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}, \ y \mapsto \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \ge y\}$$

Quantilfunktion von F.

a) Berechne und skizziere die Quantilfunktion der Zufallsvariable X mit $\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(X = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{6}$ (vgl. Blatt 3, Aufgabe 5).

b) Zeige: Eine Quantilfunktion ist monoton wachsend.

c) Zeige:
$$F(x) \ge y \iff x \ge F^{-1}(y)$$

d) Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_{[0,1]})$, d.h. der Grundraum ist das Intervall $[0,1]$, das Ereignissystem ist die Borel-σ-Algebra auf $[0,1]$ und das Wahrscheinlichkeitsmaß ist die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf $[0,1]$. Zeige: Die Zufallsvariable X, die definiert ist durch $X(\omega) = F^{-1}(\omega)$ besitzt die Verteilungsfunktion F. (Dass X tatsächlich eine Zufallvariable ist, braucht ihr nicht zu zeigen.)

Bem.: Dies ist die Grundlage der Inversionsmethode zur Erzeugung von Zufallszahlen.
Im Computer werden Zufallszahlen, die anderen Verteilungen als der Gleichverteilung entspringen, in einem zweistufigen Verfahren erzeugt: Zunächst werden gleichverteilte Zufallszahlen erzeugt. Diese werden dann so transformiert, dass sie die gewünschte Verteilung besitzen. Hierfür kann man z.B. die in Teil d) bewiesene Aussage verwenden. Dieses Verfahren, genannt Inversionsmethode, ist theoretisch zur Transformation auf jede beliebige Verteilung geeignet, wird aber nur für wenige Verteilungen, z.B. die Exponentialverteilung, eingesetzt, da bei vielen Verteilungen die Berechnung von F^{-1} zu aufwendig ist.