Angewandte Stochastik I
SS 2014

Dr. Markus Kunze
Dr. Jürgen Kampf

5. Übungsblatt
Abgabe: 4. Juli, 10:15

Hinweise:

- Dies ist das letzte Blatt, das in das 50%-Kriterium einfließt.
- Es sind 20 Punkte erreichbar. Davon sind 9 Bonuspunkte, d.h. für die Berechnung der vollen Punktzahl des 50%-Kriteriums zählen nur 11 Punkte als erreichbar.

Aufgabe 1: Das Minimum unabhängiger Zufallsvariablen
(2 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n \sim U([0,1])$ unabhängige Zufallsvariablen. Berechne die Verteilungsfunktion von $\min\{X_1, \dots, X_n\}$.

Aufgabe 2: Diskrete 2-dimensionale Verteilung
(3 Punkte)

Die gemeinsame Verteilung zweier Zufallsvariablen X und Y sei gegeben durch

Y	$X = 0$	3	6
1	p_1	p_2	p_3
2	0.1	0.05	p_4

Es sei weiterhin bekannt, dass

- $\mathbb{P}(Y = 2 \,|\, X = 0) = 1/4$,
- X und Y unabhängig sind.

Bestimme $p_1, \dots, p_4$.

Aufgabe 3: Stetige 2-dimensionale Verteilung
(1,5+3+0,5+2=7 Punkte)

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein absolutstetiger Zufallsvektor mit der Dichte

$$f(t_1, t_2) = \begin{cases} 2t_1 + \frac{2}{3}t_2, & \text{falls } (t_1, t_2) \in [-0.5, 0.5] \times [3, \sqrt{12}], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige, dass f wirklich eine zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

b) Bestimme die Randdichten von X_1 und X_2.

c) Überprüfe, ob X_1 und X_2 unabhängig sind.

d) Berechne $\mathbb{P}(X_2 \le \sqrt{10} \mid X_1 \ge 0)$.

Aufgabe 4: Busse verpassen
(3 Punkte)

Du kommst gleichverteilt zwischen 18:00 und 18:05 an einer Bushaltestelle an. Der Bus fährt laut Fahrplan um 18:02 und hat eine Verspätung, die in Minuten $\mathsf{exp}_{1/3}$-verteilt und unabhängig von deiner Ankunftszeit ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreichst du den Bus?

Aufgabe 5: Paarweise und totale Unabhängigkeit
(2+1=3 Punkte)

Seien X und Y zwei unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ und sei $Z := X \cdot Y$. Zeige:

a) X und Z sind unabhängig.

b) X, Y und Z sind nicht unabhängig.

Aufgabe 6: Die multivariate Normalverteilung
(2 Punkte)

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein multivariat normalverteilter Zufallsvektor in $\mathbb{R}^2$. Der Erwartungswertvektor μ sei der Nullvektor und die Kovarianzmatrix C sei die Einheitsmatrix. Zeige, dass $X_1^2 + X_2^2 \sim \mathsf{exp}_{1/2}$.
Hinweis: Transformation auf Polarkoordinaten.