Angewandte Stochastik I
SS 2014

Dr. Markus Kunze
Dr. Jürgen Kampf

6. Übungsblatt
Besprechung: 18. Juli, 10:15

Hinweis: Meldet Euch spätestens am Donnerstag, den 10. Juli, zur Vorleistung an.

Aufgabe 1: Faltung: Die Dichte der Erlang-Verteilung (3 Punkte)

Die $\mathsf{Erlang}_{n,\lambda}$-Verteilung ist die Verteilung von $X_1 + \cdots + X_n$, wobei $X_1, \ldots, X_n \sim \mathsf{exp}_\lambda$ unabhängige Zufallsvariablen sind. Zeige durch vollständige Induktion: Die Dichte der $\mathsf{Erlang}_{n,\lambda}$-Verteilung ist gegeben durch

$$f_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 2: Diskrete 2-dimensionale Verteilung (2+3+1=6 Punkte)

Die gemeinsame Verteilung zweier *unabhängiger* Zufallsvariablen X und Y sei gegeben durch

Y	$X = 0$	3	6
1	0.3	0.15	0.3
2	0.1	0.05	0.1

a) Bestimme die Verteilung von X und die Verteilung von Y.

b) Berechne die Erwartungswerte und die Varianzen von X und Y.

c) Welche Kovarianz und welche Korrelation haben X und Y?

Aufgabe 3: Verdopplungsstrategie beim Roulette (2 Punkte)

Wir betrachten ein Roulette-Spiel ohne 0. Es ist möglich mit einem beliebigen Einsatz auf ein Ereignis der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zu tippen. Falls der Tipp richtig war, erhält man den Einsatz zurück und noch einmal den selben Betrag als Gewinn dazu. War der Tipp falsch, verliert man den Einsatz.
In einem Casino werden fortlaufend Roulette-Spiele angeboten. Mit folgender Strategie gewinnt man sicher 1 Euro: Im ersten Spiel setzt man 1 Euro. Gewinnt man, geht man nach Hause. Verliert man, so setzt man im 2. Spiel 2 Euro. Gewinnt man nun, so hat man insgesamt einen Gewinn von 1 Euro und geht nach Hause. Verliert man, so setzt man im nächsten Spiel 4 Euro usw. Man setzt also im j-ten Spiel 2^{j-1} Euro, falls man die ersten $j-1$ Spiele verloren hat.
Da die Strategie in der Praxis nicht angewendet wird, muss sie wohl einen Haken haben. Sei V der maximale Verlust, den man im Laufe des Casino-Besuchs irgendwann hat. Zeige $\mathbb{E}[V] = \infty$.

Aufgabe 4: Stetige 2-dimensionale Verteilung (5+2=7 Punkte)

Es sei $X = (X_1, X_2)$ ein zweidimensionaler stetiger Zufallsvektor mit Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{3}{2} x_1^2 x_2 + \frac{1}{2}(x_2 - \frac{1}{2}) - \frac{3}{4} x_1^2 & \text{falls } x_1 \in [0,1] \text{ und } x_2 \in [1,2] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechne die Erwartungswerte und Varianzen von X_1 und von X_2.

b) Berechne die Kovarianz und die Korrelation von X_1 und X_2.