Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2013
23.09.2013

Angewandte Stochastik I - 2. Klausur

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Hans und Peter werfen abwechselnd mit zwei Würfeln. Hans gewinnt, wenn er vor Peter die Augensumme 6 würfelt und Peter gewinnt, wenn er vor Hans die Augensumme 7 würfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Hans das Spiel gewinnt, wenn er beginnt?

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Ein Museum verwendet für die Beleuchtung seiner Kunstgegenstände zu 40% Energiesparleuchten mit einer langen, 35% mit einer mittleren und 25% mit einer kurzen Lebensdauer. 30% der Energiesparleuchten mit kurzer, 10% mit mittlerer und 5% mit langer Lebensdauer sind defekt. Angenommen, man finde eine defekte Energiesparleuchte; mit welcher Wahrscheinlichkeit war diese von mittlerer Lebensdauer?

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Die Zufallsvariablen X und Y besitzen die gemeinsame Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{(1+x+y)^3}, & \text{falls} \quad x,y \geq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeige, dass es sich bei f tatsächlich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt.

(b) Sind X und Y unabhängig? (mit Begründung!)

(c) Bestimme den Erwartungswert der Zufallsvariable $1/(1+X)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die absolut stetige Zufallsvariable X beschreibe die zufällige Dauer eines Telefongesprächs, wobei $X \sim Exp(1/4)$ gelte. Eine Telefongesellschaft berechnet für Gespräche bis zu $N \in \mathbb{N}$ Minuten einen Festpreis von $0,20$ Euro, danach steigt der Preis quadratisch zu der Gesprächsdauer mit einem Koeffizienten $a \in \mathbb{R}$. Die Zufallsvariable $K = k_{a,N}(X)$ gebe die Kosten eines Telefonanrufes der Länge X an. Berechne Erwartungswert und Varianz von K[1].

(bitte wenden)

[1] Es darf ohne Beweis verwendet werden: $X \sim Exp(\lambda) \;\Rightarrow EX^k = \frac{k!}{\lambda^k}$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

(a) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit $EX^2 = EY^2 < \infty$ und $EX = EY$. Zeige, dass dann $X + Y$ und $X - Y$ unkorreliert sind.

(b) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit $X \sim U(-1, 1)$ und $Y = X^2$. Zeige, dass X und Y unkorreliert, aber dennoch abhängig[2] sind.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Multiple Choice
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede Falsche wird ein Punkt abgezogen. Die Minimalpunktzahl beträgt dabei Null Punkte. Bitte alle Aussagen auf einem **extra Zettel** mit wahr bzw. falsch bewerten. Andere Zeichen oder Ausdrücke sind ungültig und werden als falsch gewertet.

1.) Die geometrische Verteilung ist eine absolutstetige Verteilung.

2.) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$, mit $P(B) > 0$ gilt stets: A, B sind unabhängig $\Leftrightarrow$ $P(A|B) = P(A)$.

3.) Die Komponenten eines 2-dimensional normalverteilten Zufallsvektors sind unkorreliert genau dann, wenn sie unabhängig sind.

4.) Die Dichte f_X einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen X ist gegeben durch

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

5.) Für jede Verteilungsfunktion F gilt: $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

6.) Verteilungsfunktionen sind monoton fallend.

7.) Die Poisson'sche Approximation wird auch als das „Gesetz der seltenen Ereignisse“ bezeichnet.

8.) Die Komponenten eines absolut stetigen Zufallsvektors sind genau dann unabhängig, wenn sich seine Dichte als das Produkt der Randdichten darstellen lässt.

9.) Für die Varianz einer Zufallsvariablen X mit $EX^2 < \infty$ gilt: $Var(X) = EX^2 - (EX)^2$.

10.) Die Kovarianz zweier Zufallsvariaben ist stets zwischen Null und Eins.

[2] Betrachte z.B. $P(Y \leq \frac{1}{4}, X \leq \frac{1}{2})$.