Musterlösung zur Nachklausur Angewandte Stochastik I, SS 2013
(ausgearbeitet von Jürgen Kampf)

Aufgabe 1

Beim Würfeln mit 2 (unterscheidbaren) Würfeln gibt es 36 mögliche Ergebnisse, die als gleichwahrscheinlich angenommen werden können. Dabei gibt es 5 Möglichkeiten (5+1, 4+2, 3+3, 2+4 und 1+5), dass die Augensumme 6 ist und 6 Möglichkeiten (6+1, 5+2, 4+3, 3+4, 2+5 und 1+6), dass die Augensumme 6 ist. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Wurf die Augensumme 6 auftritt, 5/36 und die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Wurf die Augensumme 7 auftritt, $6/36 = 1/6$.
Es bezeichne H_k das Ereignis, dass Hans im k-ten Wurf die Augensumme 6 würfelt, und P_k das Ereignis, dass Peter im k-ten Wurf die Augensumme 7 würfelt (wir nehmen an, dass die beiden auch nach Ende des Spiels endlos weiterwürfeln). Es sei nun A_k dass Ereignis, dass Hans im k-ten Wurf das Spiel gewinnt. Dann gilt

$$A_1 = H_1 \quad \text{und} \quad A_k = H_k \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} H_j^C \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} P_j^C,\ k \geq 2.$$

Wegen der Unabhängigkeit der einzelnen Würfe folgt hieraus

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(H_k) \cdot \prod_{j=1}^{k-1}(1-\mathbb{P}(H_j)) \cdot \prod_{j=1}^{k-1}(1-\mathbb{P}(P_j)) = \frac{5}{36} \cdot (1-\frac{5}{36})^{k-1}(1-\frac{1}{6})^{k-1} = \frac{5}{36} \cdot (\frac{155}{216})^{k-1}$$

für $k \geq 2$. Auch im Fall $k = 1$ gilt

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(H_1) = \frac{5}{36} = \frac{5}{36} \cdot (\frac{155}{216})^{k-1}.$$

Wegen der Disjunktkeit der Ereignisse der A_k ist die Wahrscheinlichkeit, dass Hans gewinnt

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{36} \cdot (\frac{155}{216})^{k-1} = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{1-\frac{155}{216}} = \frac{30}{61} \approx 0,49.$$

Aufgabe 2

Sei D das Ereignis, dass die gefundene Leuchte defekt ist, und K, M und L die Ereignisse, dass sie von kurzer, mittlerer bzw. langer Lebensdauer ist. Nach der Formel von Bayes gilt nun

$$\mathbb{P}(M|D) = \frac{\mathbb{P}(D|M) \cdot \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(D|K) \cdot \mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(D|M) \cdot \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(D|L) \cdot \mathbb{P}(L)} = \frac{0,1 \cdot 0,35}{0,3 \cdot 0,25 + 0,1 \cdot 0,35 + 0,05 \cdot 0,4} \approx 0,27$$

Aufgabe 3

a) Es gilt $f(x,y) \geq 0$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d(x,y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{2}{(1+x+y)^3}\, dx\, dy \\
&= \int_0^\infty \int_{1+y}^\infty \frac{2}{t^3}\, dt\, dy \\
&= \int_0^\infty 2 \cdot [-\tfrac{1}{2} t^{-2}]_{t=1+y}^{\infty}\, dy \\
&= \int_0^\infty (1+y)^{-2}\, dy \\
&= \int_1^\infty u^{-2}\, du \\
&= [-u^{-1}]_{u=1}^{u=\infty} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

b) X und Y sind nicht unabhängig.
Mit Rechnungen aus den a)-Teil folgt, dass die Randdichte von Y gegeben ist durch

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_Y(y)\,dy = \int_0^\infty \frac{2}{(1+x+y)^3}\,dx \;\cdot\; \mathbf{1}_{[0,\infty)}(y) = \frac{1}{1+y^2} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(y).$$

Analog ist die Randdichte von X gegeben durch

$$f_X(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Nun gilt

$$f(0,0) = \frac{2}{1^3} = 2, \quad \text{aber} \quad f_X(0) \cdot f_Y(0) = \frac{1}{1^2} \cdot \frac{1}{1^2} = 1.$$

Die gemeinsame Dichte ist also nicht das Produkt der Randdichten.
c)

$$\mathbb{E}[\frac{1}{1+X}] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x} f_X(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+x}\frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{u^3}\,du = [-\frac{1}{2}u^{-2}]_{u=1}^{u=\infty} = 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4
Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[K] &= \int_0^\infty k_{a,N}(t) f_X(t)\,dt \\
&= \int_0^N 0,2 \cdot \frac{1}{4} e^{-1/4\cdot t}\,dt + \int_N^\infty at^2 \cdot \frac{1}{4} e^{-1/4\cdot t}\,dt \\
&= 0,2 \cdot [-e^{-1/4\cdot t}]_{t=0}^{t=N} + \int_0^\infty a(t+N)^2 \cdot \frac{1}{4} e^{-1/4\cdot(t+N)}\,dt \\
&= 0,2 \cdot (-e^{-1/4\cdot N} + e^{-0}) + a \cdot e^{-1/4\cdot N} \cdot \left(\int_0^\infty t^2 \cdot \frac{1}{4} e^{-1/4\cdot t}\,dt + 2N \cdot \int_0^\infty t \cdot \frac{1}{4} e^{-1/4\cdot t}\,dt + N^2 \cdot \int_0^\infty \frac{1}{4} e^{-1/4\cdot t}\,dt \right) \\
&= 0,2 \cdot (1 - e^{-1/4\cdot N}) + a \cdot e^{-1/4\cdot N} \cdot \left(\mathbb{E}[X^2] + 2N \cdot \mathbb{E}[X] + N^2 \cdot 1 \right) \\
&= 0,2 \cdot (1 - e^{-1/4\cdot N}) + a \cdot e^{-1/4\cdot N} \cdot \big(\frac{2!}{(1/4)^2} + 2N \cdot \frac{1!}{1/4} + N^2 \big) \\
&= 0,2 \cdot (1 - e^{-1/4\cdot N}) + a \cdot e^{-1/4\cdot N} \cdot \big(32 + 8N + N^2 \big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[K^2] &= \int_0^\infty k_{a,N}(t)^2 f_X(t)\,dt \\
&= \int_0^N (0,2)^2 \cdot \frac{1}{4} e^{-1/4\cdot t}\,dt + \int_N^\infty (at^2)^2 \cdot \frac{1}{4} e^{-1/4\cdot t}\,dt \\
&= 0,04 \cdot [-e^{-1/4\cdot t}]_{t=0}^{t=N} + \int_0^\infty a^2(t+N)^4 \cdot \frac{1}{4} e^{-1/4\cdot(t+N)}\,dt \\
&= 0,04 \cdot (-e^{-1/4\cdot N} + e^{-0}) + a^2 \cdot e^{-1/4\cdot N} \cdot \left(\sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} N^{4-j} \int_0^\infty t^j \cdot \frac{1}{4} e^{-1/4\cdot t}\,dt \right) \\
&= 0,04 \cdot (1 - e^{-1/4\cdot N}) + a^2 \cdot e^{-1/4\cdot N} \cdot \left(\sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} N^{4-j} \mathbb{E}[X^j] \right) \\
&= 0,04 \cdot (1 - e^{-1/4\cdot N}) + a^2 \cdot e^{-1/4\cdot N} \cdot \left(\sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} N^{4-j} j! 4^j \right)
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Var}(K) = \mathbb{E}[K^2] - \mathbb{E}[K]^2 = 0,04 \cdot (1 - e^{-1/4 \cdot N}) + a \cdot e^{-1/4 \cdot N} \cdot \left(\sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} N^{4-j} j! 4^j \right)$$
$$- \Big(0,2 \cdot (1 - e^{-1/4 \cdot N}) + a \cdot e^{-1/4 \cdot N} \cdot \big(32 + 8N + N^2 \big) \Big)^2$$

Aufgabe 5

a) Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X+Y, X-Y) &= \mathbb{E}[(X+Y)(X-Y)] - \mathbb{E}[X+Y] \cdot \mathbb{E}[X-Y] \\ &= \mathbb{E}[X^2 - Y^2] - (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]) \cdot (\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]) \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[X])^2 + (\mathbb{E}[Y])^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X^3] = \int_{-1}^{1} t^3 \cdot \tfrac{1}{2} \, dt = \tfrac{1}{2} [\tfrac{1}{4} t^4]_{t=-1}^{t=1} = \tfrac{1}{2} (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}) = 0.$$

Also

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 0 - 0 \cdot \mathbb{E}[Y] = 0.$$

Somit sind X und Y unkorreliert.
Es gilt

$$\mathbb{P}(Y \leq \tfrac{1}{4}, X \leq \tfrac{1}{2}) = \mathbb{P}(-\tfrac{1}{2} \leq X \leq \tfrac{1}{2}, X \leq \tfrac{1}{2}) = \mathbb{P}(-\tfrac{1}{2} \leq X \leq \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2},$$

aber

$$\mathbb{P}(Y \leq \tfrac{1}{4}) \cdot \mathbb{P}(X \leq \tfrac{1}{2}) = \mathbb{P}(-\tfrac{1}{2} \leq X \leq \tfrac{1}{2}) \cdot \mathbb{P}(X \leq \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{8}.$$

Also sind X und Y nicht unabhängig.