Dr. Katharina Best
David Neuhäuser

SoSe 2011
11. 7. 2011

Klausur zu "Angewandte Stochastik I"

Quantiltabelle Standardnormalverteilung:

Quantil	Wert
$z_{0.90}$	1.28
$z_{0.95}$	1.65
$z_{0.975}$	1.96
$z_{0.99}$	2.33
$z_{0.995}$	2.58

Aufgabe 1 (2+4+5+4 Punkte)
In einer Urne befinden sich 26 Kugeln, die mit den Buchstaben des deutschen Alphabetes (21 Konsonanten, 5 Vokale) beschriftet sind. Stelle einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum auf und bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei 6-maligem Ziehen ohne Zurücklegen

(a) als ersten Buchstaben einen Vokal zieht,

(b) höchstens drei Vokale zieht,

(c) aus den gezogenen Buchstaben das Wort "PHYSIK" legen kann.

Bitte begründe Deine Antworten.

Aufgabe 2 (6+6 Punkte)
Von einem Ort A führen zwei Strassen zu einem Ort B. Außerdem führen zwei Strassen von Ort B zu einem weiteren Ort C. Jede dieser vier Strassen habe nun die Wahrscheinlichkeit p, auf Grund von Schneeglätte nicht befahrbar zu sein, und zwar unabhängig voneinander.

(a) Stelle einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum auf und bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass es einen freien Weg von A nach C gibt.

(b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass es einen freien Weg von A nach B gibt unter der Voraussetzung, dass es keinen freien Weg von A nach C gibt.

Aufgabe 3 (5+3 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Beweise die folgende Ungleichung: Für beliebige $A, B \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mathbb{P}(A \backslash B) \geq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B).$$

(b) Es sei $P(A) = \frac{3}{4}$ und $P(B) = \frac{1}{3}$. Zeigen Sie, dass

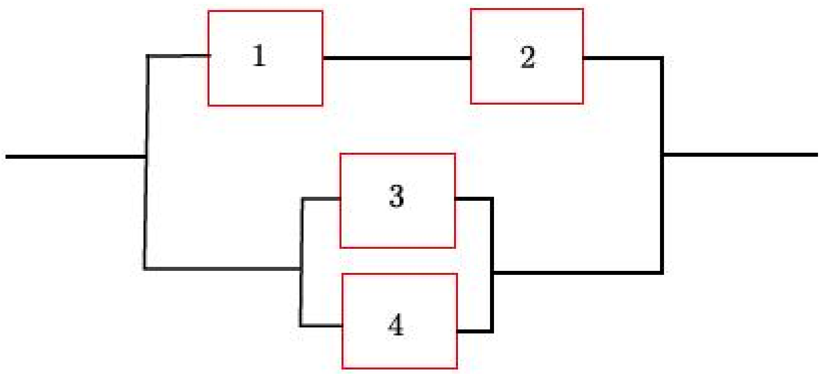
$$\frac{5}{12} \leq \mathbb{P}(A \backslash B) \leq \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 4 (8+9 Punkte)
Die Stadt Ulm hat sich dazu entschlossen, aktiv etwas zum Umweltschutz beizutragen und lässt deshalb auf den Dächern der Häuser Solarzellen anbringen. Die Gesamtfläche der Zellen pro Dach lasse sich modellieren durch $X_i = \mu + Z_i$. Hierbei sollen Z_i unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}Z_1 = 0$ und $Var\ Z_1 = 1$ sein. Nach n Messungen wird die Gesamtfläche der Zellen pro Dach als $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ aus allen Beobachtungen gemittelt. Sei $\mu = \mathbb{E}X_1$ der wahre Wert der Gesamtfläche der Zellen pro Dach. Wie viele Beobachtungen n müssen durchgeführt werden, damit die Schätzung $\overline{X}_n$ um weniger als 0.1 vom Wert μ mit Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 abweicht?

(a) Verwende die Tschebyschev-Ungleichung um eine untere Schranke zu konstruieren.

(b) Verwende den zentralen Grenzwertsatz, um eine approximative Lösung anzugeben.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
In einer Parallelschaltung von zwei Schaltelementen fließt genau dann Strom, wenn höchstens eines defekt ist, während bei einer Reihenschaltung keines der Elemente defekt sein darf. In der unten gegebenen Schaltung falle das mit $i \in \{1, \ldots, 4\}$ nummerierte Schaltelement mit der Wahrscheinlichkeit p_i unabhängig von den anderen Schaltelemente aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fließt in der Schaltung Strom? Stelle dazu auch ein geeignetes Modell auf!



Aufgabe 6 (3+6+8+3 Punkte)
Seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = c \cdot y(x+y)\mathbb{1}_{(0,2)}(x)\mathbb{1}_{(0,1)}(y).$$

(a) Bestimme c.
(b) Bestimme die Randdichten von X und Y.(Falls Du bei (a) nichts für c rausbekommen hast, berechne die Randdichten in Abhängigkeit von c).
(c) Bestimme $\mathbb{E}X$ sowie $Var\ X$.
(d) Sind X und Y unabhängig ?

Aufgabe 7 (7+11 Punkte)
Betrachte den 3-maligen Münzwurf, wobei Du davon ausgehen kannst, dass es sich um eine faire Münze handelt, d.h. Kopf und Zahl fallen jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Betrachte ferner die beiden Zufallsvariablen X bzw. Y, die die Anzahl der Erfolge bzw. die Nummer des Versuches angeben, bei dem zum ersten Mal ein Erfolg (hier Kopf) eintritt.

(a) Stelle ein geeignetes Modell auf. Gib dafür den Grundraum, die Verteilung von X und eine geeignete mathematische Beschreibung von Y an (setze $y = \infty$, falls kein Erfolg eintritt).
(b) Bestimme nun die Einzelwahrscheinlichkeiten des Zufallsvektors (X,Y) und fülle damit folgende Tabelle aus:

			y			
	$P(X=x,Y=y)$	1	2	3	∞	$P(X=x)$
	0					
x	1					
	2					
	3					
	$P(Y=y)$					