Juniorprof. Dr. Zakhar Kabluchko
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2014
24.04.2014

Extremwerttheorie - Übungsblatt 1

Abgabe: 8. Mai vor Beginn der Übung.

Allgemeine Hinweise:

- Die Teilnahme an der Übung setzt eine Anmeldung im SLC-Portal voraus.
- Übungsblätter sollen zu zweit abgegeben werden.
- Um zur Klausur zugelassen zu werden müssen insgesamt auf allen Blättern mindestens 50% der Übungspunkte erreicht werden und eine Aufgabe vorgerechnet werden.

Aufgabe 1 (2 + 3 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F.

(a) Bestimme die Verteilungsfunktion von $m_n := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(b) Bestimme die gemeinsame Verteilungsfunktion von m_n und $M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, d.h. berechne die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[m_n \leq x, M_n \leq y]$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Zeige: Ist F eine Gumbel-, Fréchet- oder Weibullverteilung, so gibt es reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, so, dass die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable

$$\frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\} - b_n}{a_n}$$

ebenfalls gleich F ist, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (1 + 2 + 2 Punkte)

Zwei Verteilungsfunktionen F und G heißen vom selben Typ (Schreibweise: $F \bowtie G$), falls es $c > 0$ und $d \in \mathbb{R}$ gibt, so, dass $G(t) = F(ct + d)$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $F \bowtie G$ eine Äquivalenzrelation ist, d.h.

a) $F \bowtie F$

b) $F \bowtie G \ \Rightarrow\ G \bowtie F$

c) $F \bowtie G, G \bowtie H \ \Rightarrow\ F \bowtie H$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Eine Zufallsvariable mit Dichte $f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ heißt Cauchy-verteilt. In welchem Max-Anziehungsbereich liegt die Cauchy-Verteilung? Bitte gib einen Beweis an.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $f(t) = e^{(\log t)^\beta}$ für $\beta < 1$ langsam variierend ist in $+\infty$ und nicht regulär variierend ist in $+\infty$ für $\beta > 1$. Ist die Funktion $g(t) = 2 + \sin t$ regulär variierend in $+\infty$?