Juniorprof. Dr. Zakhar Kabluchko
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2014
08.05.2014

Extremwerttheorie - Übungsblatt 2

Abgabe: 15. Mai vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Sei $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ und $x^* = \sup\{t \in \mathbb{R} : F(t) < 1\}$. Zeige, dass M_n *fast sicher* gegen x^* konvergiert.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien F und G zwei Verteilungsfunktionen mit

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1-F(t)}{1-G(t)} = c,$$

wobei $0 < c < \infty$. Zeige: Liegt F im Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung Φ_α, so liegt auch G im Max-Anziehungsbereich von Φ_α.

Aufgabe 3 (3 + 4 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte f und Verteilungsfunktion F. Zeige:

(a) Gilt $f(t) \sim Kt^{-\alpha}$, $t \to +\infty$, mit $K > 0$ und $\alpha > 1$, so folgt

$$\bar{F}(t) \sim \frac{K}{\alpha-1} t^{1-\alpha}, \qquad t \to +\infty.$$

(b) Gilt $f(t) \sim Kt^{-\alpha} e^{-t^\beta}$, $t \to +\infty$, mit $K > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, so folgt

$$\bar{F}(t) \sim \frac{K}{\beta} t^{1-\alpha-\beta} e^{-t^\beta}, \qquad t \to +\infty.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei F eine Verteilungsfunktion mit $\bar{F}(t) \sim K(\log t)^\alpha t^{-\beta}$, $t \to +\infty$, wobei $K > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Zeige, dass F im Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung Φ_β liegt. Konstruiere explizit eine Folge b_n von Konstanten mit

$$\lim_{n\to\infty} F^n(b_n t) = e^{-1/t^\beta} \text{ für alle } t > 0.$$

Hinweis: Wähle b_n so, dass $\bar{F}(b_n) \sim 1/n$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Die Zufallsvariable X sei geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$, d.h. $\mathbb{P}[X = k] = p(1-p)^{k-1}$ für $k = 1, 2, \ldots$. Zeige, dass X in keinem der drei Max-Anziehungsbereiche liegt.