ulm university universität uulm

Juniorprof. Dr. Zakhar Kabluchko
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2014
15.05.2014

# Extremwerttheorie - Übungsblatt 3

Abgabe: 22. Mai vor Beginn der Übung.

**Aufgabe 1** (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $f(t) = (\log t)^{c(\log t)^\beta}$, wobei $\beta < 1$ und $c \in \mathbb{R}$ , langsam variierend in $+\infty$ ist.

**Aufgabe 2** (6 Punkte)

Die Verteilungsfunktion $F$ gehöre zum Max-Anziehungsbereich der Fréchet-verteilung $\Phi_\alpha$ und die Verteilungsfunktion $G$ gehöre zum Max-Anziehungsbereich von $\Phi_\beta$, wobei $\alpha \neq \beta$. Sei außerdem $p \in (0,1)$. Beweise, dass die Verteilungsfunktion $pF + (1-p)G$ im Max-Anziehungsbereich von $\Phi_{\min\{\alpha,\beta\}}$ liegt.

*Hinweis:* Folgende Aussage kann ohne Beweis verwendet werden: Für jede in $+\infty$ langsam variierende Funktion $L$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_{t\to+\infty} L(t)/t^\varepsilon = 0$.

**Aufgabe 3** (9 Punkte)

Sei $F$ eine Verteilungsfunktion mit $\bar{F}(t) \sim Kt^\alpha e^{-t^\beta}$, $t \to +\infty$, wobei $K > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Zeige, dass $F$ im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung $\Lambda$ liegt und finde Konstanten $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n t + b_n) = e^{-e^{-t}} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Gib dabei die Konstanten $a_n$ und $b_n$ explizit an (d.h. insbesondere nicht als Quantilfunktionen).

**Aufgabe 4** (2 + 2 Punkte)

Sei $X$ eine Zufallsvariable mit der Gumbel-Verteilungsfunktion $\Lambda(t) = e^{-e^{-t}}$.

(a) Zeige, dass $e^X$ eine Fréchet-Verteilung mit Verteilungsfunktion $e^{-1/t}$, $t > 0$, hat.

(b) Zeige, dass $-e^{-X}$ eine Weibull-Verteilung mit Verteilungsfunktion $e^t$, $t < 0$, hat.

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

In der Versicherungsmathematik wird für die Modellierung der Schadenhöhen die sogenannte Burr-Verteilung mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = 1 - \left(\frac{C}{C + t^\beta}\right)^\alpha, \quad t \geq 0, \quad (F(t) = 0 \text{ für } t \leq 0)$$

verwendet. Dabei sind $C > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ Parameter. Zeige, dass die Burr-Verteilung im Max-Anziehungsbereich einer Fréchet-Verteilung liegt.