Juniorprof. Dr. Zakhar Kabluchko
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2014
22.05.2014

Extremwerttheorie - Übungsblatt 4

Abgabe: 5. Juni vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien $N, X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen. Die Zufallsvariable N sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ seien exponentialverteilt mit Parameter 1, d.h. $\mathbb{P}[X_i \geq t] = e^{-t}$ für $t > 0$. Bestimme die Verteilungsfunktion von

$$M := \max\{X_1, \dots, X_N\}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - (1-t)^\alpha, & t \in [0,1], \\ 1, & t \geq 1, \end{cases}$$

wobei $\alpha > 0$. Gib explizit eine Funktion $a(u) > 0$ und eine nichtdegenerierte Verteilungsfunktion G an, so dass für $u \uparrow 1$ die bedingte Verteilung von $a(u)(X-u)$ gegeben dass $X > u$ gegen G konvergiert:

$$\lim_{u \uparrow 1} \mathbb{P}[a(u)(X-u) \leq t \,|\, X > u] = G(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{1/t}, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Zeige, dass F im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung liegt (obwohl der rechte Endpunkt endlich ist) und gib explizit Konstanten $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ an mit

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\} - b_n}{a_n} \leq t\right] = e^{-e^{-t}} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichtefunktion f. Sei

$$N_n = \min\{k \in \mathbb{N} : X_{n+k} > \max\{X_1, \dots, X_n\}\}.$$

Bestimme $\mathbb{P}[N_n = m]$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{E}N_n$.

Aufgabe 5 (3 + 2 + 2 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $F(x) = e^{\sqrt{\log(1+x)}\cos(\sqrt[4]{\log(1+x)})}$ folgende Eigenschaften besitzt:

1.) F ist langsam variierend in $+\infty$.

2.) $\limsup\limits_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$.

3.) $\liminf\limits_{t\to+\infty} F(t) = 0$.