Juniorprof. Dr. Zakhar Kabluchko
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2014
05.06.2014

Extremwerttheorie - Übungsblatt 5

Abgabe: 12. Juni vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (1 + 1 + 2 Punkte)

Seien $Z_1, \dots, Z_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[Z_i > t] = e^{-t}$, $t > 0$. Zeige, dass für die Ordnungsstatistiken $Z_{1:n} \leq \ldots \leq Z_{n:n}$ gilt

(a) $\mathbb{E}[Z_{k:n}] = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-k+1}$.

(b) $\operatorname{Var}[Z_{k:n}] = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n-k+1)^2}$.

(c) $\operatorname{Cov}(Z_{k:n}, Z_{l:n}) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n-k+1)^2}$ falls $k \leq l$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Bestimme die gemeinsame Verteilungsfunktion des Vektors (M_n, M_{n+1}), wobei $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ und $M_{n+1} = \max\{X_1, \dots, X_{n+1}\}$.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Es seien $U_1, \dots, U_n$ unabhängige, auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Zeige, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die folgende Verteilungskonvergenz gilt:

$$(nU_{1:n}, \dots, nU_{k:n}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (\nu_1, \nu_1 + \nu_2, \dots, \nu_1 + \ldots + \nu_k),$$

wobei $\nu_1, \nu_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[\nu_i > t] = e^{-t}$, $t > 0$, sind (Standardexponentialverteilung). Zeige auch, dass

$$(n(1 - U_{n:n}), \dots, n(1 - U_{n-k+1:n})) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (\nu_1, \nu_1 + \nu_2, \dots, \nu_1 + \ldots + \nu_k).$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen aus dem Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung Φ_α, so dass

$$\frac{M_n - a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Phi_\alpha.$$

Zeige, dass für $M_n^{(k)} = X_{n-k+1:n}$ mit festem $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{M_n^{(k)} - a_n}{b_n} \leq x\right] = \frac{1}{(k-1)!} \int_{x^{-\alpha}}^{\infty} e^{-t} t^{k-1} dt, \qquad x > 0.$$

Freiwillig: Leite die entsprechenden Formeln für die Max-Anziehungsbereiche der Gumbel- und Weibull-Verteilungen her.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion F und $X_{1:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ die Ordnungsstatistiken von $X_1, \ldots, X_n$. Für vorgegebenes $k \in \{1, \ldots, n\}$ definiere

$$N = \min\{j \in \mathbb{N} : \ X_{n+j} > X_{n-k+1:n}\}.$$

Bestimme $\mathbb{P}[N = m]$ und $\mathbb{E}N$.