Juniorprof. Dr. Zakhar Kabluchko
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2014
12.06.2014

Extremwerttheorie - Übungsblatt 6

Abgabe: 26. Juni vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (3 + 2 + 1 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion F. Für $k = 2, 3, \dots$ definiert man

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } X_k > \max\{X_1, \dots, X_{k-1}\} \\ -1 & , \text{ falls } X_k < \min\{X_1, \dots, X_{k-1}\} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimme $\mathbb{P}[\delta_k = 1, \delta_l = -1]$, für $k \neq l$.

(b) Bestimme $\operatorname{Cov}(\delta_k, \delta_l)$, für $k, l \geq 2$.

(c) Bestimme $\operatorname{Var}(\delta_2 + \dots + \delta_n)$

Freiwillig: Zeige, dass $\delta_2, \delta_3, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen sind.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig identisch verteilt mit Dichtefunktion f. Bestimme die gemeinsame Dichte der Ordnungsstatistiken $X_{i:n}$ und $X_{j:n}$, wobei $1 \leq i < j \leq n$.

Aufgabe 3 (3 + 4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion F, $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ und $\xi_n = \mathbb{1}_{X_n > M_{n-1}}$. Die Rekordzeiten $L(n)$, $n \in \mathbb{N}$, seien gegeben durch

$$L(1) = 1, \quad L(n+1) = \min\{j > L(n) : \ \xi_j = 1\}, \ n > 1.$$

Definiere die Rekordwerte $X(n)$, $n \in \mathbb{N}$, durch $X(n) = X_{L(n)}$.

(a) Zeige, dass
$$\mathbb{P}[X(n) < x] = Q_n(F(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$
wobei $Q_n(s) = \mathbb{E}s^{L(n)}$ die erzeugende Funktion von $L(n)$ sei.

(b) Zeige, dass
$$Q_n(s) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^{-\log(1-s)} t^{n-1} e^{-t} dt.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ (Cauchy-Verteilung). Zeige, dass $\mathbb{E}|X_{k:n}| < \infty$ für alle $k = 2, \dots, n-1$ und $\mathbb{E}|X_{1:n}| = \mathbb{E}|X_{n:n}| = \infty$.