Juniorprof. Dr. Zakhar Kabluchko
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2014
26.06.2014

Extremwerttheorie - Übungsblatt 7

Abgabe: 3. Juli vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvektoren mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und Verteilung μ. Bestimme das Laplace-Funktional $\psi_\pi(f)$ des Binomialpunktprozesses $\pi = \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$.

Aufgabe 2

In einem zweidimensionalen kreisförmigen Land von Radius $R > 0$ seien die Städte $X_1, \dots, X_N$ durch einen homogenen Poisson-Punktprozess mit Intensität $\lambda > 0$ modelliert. Die Hauptstadt des Landes liege dabei im Mittelpunkt des Kreises. Es sollen nun alle Städte mit der Hauptstadt verbunden werden. Bestimme die erwartete Streckenlänge aller Straßen zusammen, d.h. bestimme

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} |X_i|\right],$$

wobei mit $|x|$ der Abstand des Punktes x zum Ursprung bezeichnet sei.

Aufgabe 3

Es sei $\pi = \sum_i \delta_{X_i}$ ein Poisson-Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensität μ und f eine nichtnegative Borel-Funktion auf $\mathbb{R}^d$. Zeige, dass für die lineare Statistik $S_f = \sum_i f(X_i)$ gilt

$$\mathbb{E}[S_f^2] = \int_{\mathbb{R}^d} f^2(x) d\mu(x) + \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu(x)\right)^2.$$

Hinweis: Betrachte die zweite Ableitung von $\log \mathbb{E}[e^{-\theta S_f}]$ an der Stelle $\theta = 0$. Bitte beachte, dass die Form, in der diese Aufgabe im Skript gestellt wurde, falsch ist.

Aufgabe 4

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1, 2, \dots\}$ und $\mathbb{P}[X_i = k] = p_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Seien M_n, ξ_n, $L(n)$ und $X(n)$ definiert wie auf Blatt 6. Bestimme

$$\mathbb{P}[(L(1), X(1)) = (l_1, x_1), \dots, (L(n), X(n)) = (l_n, x_n)]$$

für $1 = l_1 < l_2 < \dots < l_n$ und $0 \le x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Aufgabe 5

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1, 2, \dots\}$ und $\mathbb{P}[X_i = k] = p_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Seien M_n, ξ_n, $L(n)$ und $X(n)$ definiert wie auf Blatt 6. Bestimme

$$\mathbb{P}[X(1) = i_1, \dots, X(n) = i_n]$$

für $0 \le i_1 < i_2 < \dots < i_n$.

Hinweis. Bestimme $\mathbb{P}[X(k+1) = i_{k+1} | X(k) = i_k]$ und verwende, dass $X(1), X(2), \dots$ eine Markovkette ist. In der Endformel sind keine Summenzeichen nötig.

Aufgabe 6

Die Positionen der Sterne im Universum seien mit einem homogenen Poisson-Punktprozess Π auf $\mathbb{R}^3$ modelliert, dessen Intensität gleich $\lambda > 0$ sei. Für $x \in \mathbb{R}^3$ bezeichne mit $|x|$ den Abstand von x zum Koordinatenursprung. Die Punkte von Π (also die Positionen der Sterne) seien mit $X_1, X_2, \dots$ bezeichnet, wobei die Nummerierung so gewählt sei, dass $|X_1| < |X_2| < \dots$. Berechne die Verteilungsfunktion, die Dichte und den Erwartungswert von $|X_1|$.