Juniorprof. Dr. Zakhar Kabluchko
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2014
03.07.2014

Extremwerttheorie - Übungsblatt 8

Abgabe: 10. Juli vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei π ein Poisson-Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensitätsmaß μ. Seien $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^d$ disjunkte beschränkte Borel-Mengen mit $A = \cup_{i=1}^n A_i$. Zeige, dass für alle $k_1, \ldots, k_n, k \in \{0, 1, \ldots\}$ mit $k_1 + \ldots + k_n = k$ gilt

$$\mathbb{P}[\pi(A_1) = k_1, \ldots, \pi(A_n) = k_n | \pi(A) = k] = \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} \left(\frac{\mu(A_1)}{\mu(A)} \right)^{k_1} \ldots \left(\frac{\mu(A_n)}{\mu(A)} \right)^{k_n}.$$

Bemerkung. Diese Aussage lässt sich wie folgt interpretieren: Gegeben, dass die Menge A genau k Punkte des Poisson-Punktprozesses enthält, sind die Punkte in den jeweiligen Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ gemäß einer Multinomialverteilung mit Parameter $\left(\frac{\mu(A_1)}{\mu(A)}, \ldots, \frac{\mu(A_n)}{\mu(A)} \right)$ verteilt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien ν ein Maß auf $\mathbb{R}^d$ und $A \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge. Die Einschränkung von ν auf A ist ein Maß $\nu_{|A}$ definiert durch $\nu_{|A}(B) = \nu(A \cap B)$ für alle Borel-Mengen $B \subset \mathbb{R}^d$. Sei π ein Poisson-Punktptozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensitätsmaß μ. Zeige, dass $\pi_{|A}$ ein Poisson-Punktprozess mit Intensitätsmaß $\mu_{|A}$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien X_i, $i \in \mathbb{Z}$, die Punkte eines Poisson-Punktprozesses auf $\mathbb{R}^3$, dessen Intensität das Lebesgue-Maß ist. Zeige, dass die Punkte $|X_i|$ einen Poisson-Punktprozess auf $\mathbb{R}$ bilden und gib die Dichte seines Intensitätsmaßes an. Dabei ist $|x|$ der Abstand von x zum Ursprung.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ die Punkte eines homogenen Poisson Punktprozesses auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\lambda = 1$. Unabhängig davon seien $U_1, U_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvektoren mit Werten in $\mathbb{R}^d$, so, dass $\mathbb{P}[|U_i| < M] = 1$ für ein $M > 0$. Zeige, dass $X_1 + U_1, X_2 + U_2, \ldots$ ebenfalls die Punkte eines Poisson Punktprozesses mit Intensität $\lambda = 1$ sind.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei π_n ein Poisson Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensitätsmaß μ_n. Dabei konvergiere die Folge μ_n gegen ein lokal endliches Maß μ vage. Zeige: Der Punktprozess π_n konvergiert in Verteilung gegen einen Poisson Punktprozess mit Intensitätsmaß μ.