Juniorprof. Dr. Zakhar Kabluchko
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2014
10.07.2014

Extremwerttheorie - Übungsblatt 9

Abgabe: 17. Juli vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim N(0,1)$. Zeige, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{n \cdot X_i} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \text{PPP}(\lambda dt)$$

auf $\mathbb{R}$ und bestimme λ.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $x_n \in \mathbb{R}^d$, $c_n > 0$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$. Beweise die schwache Konvergenz

$$c_n \delta_{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{w} c\delta_x.$$

Hinweis: Eine Folge von endlichen Maßen μ_n konvergiert schwach gegen ein endliches Maß μ, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f d\mu$, für alle $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien $U_1 > U_2 > \dots$ die Punkte eines Poisson-Punktprozesses mit Intensität $\alpha t^{-(\alpha+1)} dt$ auf $(0, \infty)$. Dabei ist $\alpha > 0$ ein Parameter. Die Punkte seien absteigend angeordnet. Zeige, dass die Dichte von U_n durch

$$f_n(t) = \frac{\alpha}{(n-1)!} \frac{1}{t^{n\alpha+1}} \exp\left\{-\frac{1}{t^\alpha}\right\}, \qquad t > 0,$$

gegeben ist.

Aufgabe 4 (4 + 4 Punkte)

Sei π ein homogener Poisson Punktprozess in $\mathbb{R}^d$ mit einer unbekannten Intensität $\lambda > 0$. Man kann die Punkte von π in einem großen Fenster $[0,n]^d$ beobachten und möchte λ schätzen. Betrachte die folgenden Schätzer für die Intensität λ:

$$\hat{\lambda}_n = \frac{\pi([0,n]^d)}{n^d}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeige, dass die Folge $\hat{\lambda}_n$ stark konsistent ist, d.h.

$$\hat{\lambda}_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \lambda.$$

(b) Zeige, dass $\hat{\lambda}_n$ asymptotisch normal ist, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{n^d}{\lambda}}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \le x\right] = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichne.

Hinweis: Teile (a) und (b) können getrennt vorgerechnet werden.