Juniorprof. Dr. Zakhar Kabluchko
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2014
10.07.2014

Extremwerttheorie - Zusatzblatt

Besprechung: 17. Juli in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Es seien $c, \varepsilon : (0,\infty) \to (0,\infty)$ zwei Funktionen mit $\lim_{t\to+\infty} c(t) = c \in (0,\infty)$ und $\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0$. Zeige, dass die Funktion

$$L(t) = c(t) \exp\left\{ \int_1^t \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right\}$$

langsam variierend in $+\infty$ ist.

Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung: jede langsam variierende Funktion L lässt sich in der obigen Form schreiben (Karamata-Darstellung).

Aufgabe 2

Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig mit $\mathbb{P}[X_i > t] = e^{-t}$, $t \geq 0$. Zeige, dass

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\max\{X_1,\dots,X_n\}}{\log n} = 1$ in Wahrscheinlichkeit.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\max\{X_1,\dots,X_n\}}{\log n} = 1$ fast sicher.

Hinweis: Verwende in Aufgabe (b) das Lemma von Borel-Cantelli.

Aufgabe 3

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit Beta(α,β)-Verteilung, d.h. die Dichte von X_i sei gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}, & \text{für } t \in [0,1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$ die Euler'sche Beta-Funktion und $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sind Parameter. Gib explizit Konstanten a_n, b_n sowie eine nichtdegenerierte Verteilungsfunktion G an mit

$$\frac{\max\{X_1,\dots,X_n\} - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} G.$$

Aufgabe 4

Es sei X eine Zufallsvariable mit der Dichte

$$f(t) = C \frac{1}{(1+|t|^\alpha)^\beta},$$

wobei $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha\beta > 1$, und C so gewählt wird, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. Zeige, dass für die Tailfunktion von X gilt:

$$\bar{F}(t) \sim \frac{C}{\alpha\beta - 1} t^{1-\alpha\beta}, \qquad t \to +\infty.$$

In welchem Max-Anziehungsbereich liegt X?

Aufgabe 5

Seien $Z_1 > Z_2 > \ldots$ die Punkte eines Poisson-Punktprozesses mit Intensität $e^{-t}dt$ auf $\mathbb{R}$. Die Punkte seien absteigend angeordnet. Zeige, dass $\lim_{n\to\infty}(Z_n + \log n) = 0$ fast sicher.

Hinweis: Es seien $e_1, e_2, \ldots$ unabhängig mit $\mathbb{P}[e_i > t] = e^{-t}$, $t \geq 0$. Dann bilden die Punkte P_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $P_n = e_1 + \ldots + e_n$ einen Poisson-Punktprozess mit Intensität 1 auf $(0, \infty)$. Man kann Z_n als eine Transformation von P_n darstellen.

Aufgabe 6

Es sei $N(n)$ die Anzahl der Rekorde zum Zeitpunkt n in einer Folge $X_1, X_2, \ldots$ von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion F. Berechne den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[N(2n) - N(n) = 0].$$