Juniorprof. Dr. Zakhar Kabluchko
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2014
18.07.2014

Extremwerttheorie - Übungsblatt 10 (Bonusblatt)

Abgabe: 24. Juli vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$\frac{M_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Phi_\alpha, \quad a_n > 0, \quad \alpha > 0.$$

Dabei ist $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Für vorgegebene $0 < t_1 < \ldots < t_k$ und $x_1, \ldots, x_k > 0$ bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{M_{[t_1 n]}}{a_n} \le x_1, \ldots, \frac{M_{[t_k n]}}{a_n} \le x_k\right].$$

Hinweis: Verwende $a_n = n^{1/\alpha}$. Die Behauptung kann auch für den allgemeinen Fall bewiesen werden. Dies ist jedoch für die volle Punktzahl bei dieser Aufgabe nicht notwendig!

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $\pi = \sum_i \delta_{X_i}$ ein Poisson Punktprozess auf E mit Intensitätsmaß μ. Seien $f, g : E \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $\int_E f^2 d\mu < \infty$ und $\int_E g^2 d\mu < \infty$. Definiere $S_f = \sum_i f(X_i)$ und $S_g = \sum_i g(X_i)$. Bestimmen Sie

$$\mathrm{Cov}\left(S_f, S_g\right).$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Gamma-Verteilte Zufallsvariablen mit der Dichte

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-t}, t > 0.$$

Dabei sei $\alpha > 0$ ein Parameter. Geben Sie eine Folge $a_n > 0$ und eine nichtdegenerierte Verteilungsfunktion G an mit

$$\frac{1}{a_n} \min\{X_1, \ldots, X_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{d} G.$$

Aufgabe 4 (5 + 5 Punkte)

Seien $0 < P_1 < P_2 < \ldots$ die Punkte eines homogenen Poisson Punktprozesses auf $(0, \infty)$ mit Intensität 1. Für $\alpha \in (0, 1)$ definiere

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P_n^{1/\alpha}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Reihe mit Wahrscheinlichkeit 1 konvergiert. *Hinweis:* P_n kann in der Form $\nu_1 + \ldots + \nu_n$ dargestellt werden, wobei ν_i unabhängig und Exp(1)-verteilt sind.

(b) Seien $S_1, \ldots, S_k$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit der gleichen Verteilungsfunktion wie S. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable

$$\frac{S_1 + \ldots + S_k}{k^{1/\alpha}}$$

die gleiche Verteilung hat wie S. *Hinweis:* Die Zufallsvariable S_i kann mit Hilfe des Poisson Punktprozesses $\pi_i = \sum_{n=1}^{\infty} P_{n;i}$ dargestellt werden.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Seien $U_1, U_2, \ldots$ unabhängige, auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Sei $a \in (0,1)$ fest. Zeigen Sie, dass der Punktprozess

$$\pi_n := \sum_{i=1}^{n} \delta_{n(U_i - a)}$$

gegen einen homogenen Poisson Punktprozess mit konstanter Intensität 1 auf $\mathbb{R}$ konvergiert.