Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

SS 2014
08. 07. 2014

Stochastik I - Übungsblatt 10

Abgabe am 15. 07. **vor** Beginn der Übung

- Übungsblatt 10 ist das letzte Blatt auf das Punkte vergeben werden.
- Um die Vorleistung zu bestehen sind somit 140 Punkte nötig.
- Bitte bis zum 20.07. im Hochschulportal zur Vorleistung anmelden.
- Nach bestandener Vorleistung bitte im Hochschulportal zur Klausur anmelden (bis spätestens 4 Tage vor der Klausur).

Aufgabe 1 (1,5+2+2,5+3 Punkte)
Eine Brauerei hat beobachtet, dass die Abfüllmenge von Bierflaschen (in ml) zufällig ist. Man nimmt an, dass die Abweichung der abgefüllten Menge von der Normmenge als eine $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable angesehen werden kann. Für 13 unabhängig ausgewählte Bierflaschen ergaben sich folgende Abweichungen von der Normmenge:
$-0.014, -0.013, -0.014, -0.031, -0.01, 0.016, 0.008, -0.006, -0.019, 0.017, 0.003, -0.021, 0.012$

(a) Prüfe mit einem zweiseitigen statistischen Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass die abgefüllte Menge im Mittel nicht von der Normmenge abweicht gegen die Alternative, dass die abgefüllte Menge im Mittel von der Normmenge abweicht. Nimm an, dass $\sigma = 0.01$ bekannt ist und nutze eine Testgröße die auf dem Stichprobenmittel basiert.

(b) Sei nun -0.008 der tatsächliche Wert von μ. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art bei dem in (a) verwendeten Test?

(c) Konstruiere einen einseitigen statistischen Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ für die Hypothese, dass die abgefüllte Menge im Mittel nicht von der Normmenge abweicht gegen die Alternative, dass die abgefüllte Menge im Mittel kleiner als die Normmenge ist. Nimm an, dass $\sigma = 0.01$ bekannt ist und nutze eine Testgröße die auf dem empirischen zweiten Moment basiert. Die Nullhypothese soll abgelehnt werden, wenn die Testgröße zu hohe Werte annimmt.

(d) Nun soll die Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen die Alternative $H_1 : \mu > \mu_0$ zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ bei unbekannter Varianz getestet werden. Hierzu soll der Test

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{1}\left(\frac{\overline{x}_n - \mu_0}{s_n/\sqrt{n}} > t_{n-1,1-\alpha}\right)$$

betrachtet werden.
Zeige, dass der Test φ unverfälscht ist, die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art jedoch beliebig nah an $1 - \alpha$ liegen kann.

Aufgabe 2 (1+2+2+1,5+1,5 Punkte)

Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei $X_1 \sim \mathrm{Bin}(1, p)$ mit $p \in [0, 1]$ und $n = 10$. Weiter sei $\Theta_0 = [0, 0.6]$ und $\Theta_1 = (0.6, 1]$. Zur Überprüfung der Nullhypothese $H_0 : p \in \Theta_0$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : p \in \Theta_1$ soll der Test $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{1}_{(0.7,1]}(\overline{x}_n)$ verwendet werden.

(a) Wie viele Einsen darf eine Realisierung der Stichprobe höchstens enthalten, damit H_0 nicht verworfen wird?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art, wenn $p = 0.4$ ist?

(c) Für welches $p \in \Theta_0$ ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art maximal?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, falls $p = 0.75$?

(e) Skizziere die Gütefunktion des Tests φ. (Einzelne Werte der Gütefunktion können mit **R** ausgerechnet werden.)

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei $X_1 \sim \mathrm{U}(0, \theta)$ mit $\theta \in \Theta = (0, 1)$. Gegeben sei der Test

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \max(x_1, \ldots, x_n) > \theta_0 \text{ oder } \max(x_1, \ldots, x_n) \leq \theta_0 \alpha^{1/n}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für die Nullhypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : \theta \neq \theta_0$ für ein $\alpha \in (0, 1)$.

(a) Zeige, dass der Test φ das Signifikanzniveau α besitzt.

(b) Zeige, dass der Test φ konsistent ist.

Aufgabe 4 (4+2+2 Punkte)

Die Lebenszeit einer Glühlampe kann als eine normalverteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz σ^2 betrachtet werden. Eine Firma behauptet, dass die von ihr produzierten Glühlampen eine erwartete Betriebszeit von $\mu_0 = 850$ Stunden besitzen. Eine Verbraucherschutzorganisation hat hingegen die Vermutung, dass die Lampen in Wahrheit eine andere Lebenszeit aufweisen. Zu diesem Zweck werden die beiden folgenden statistischen Tests basierend auf dem Stichprobenmittel einer $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ betrachtet:

- φ_1 sei ein zweiseitiger Parametertest der Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : \mu \neq \mu_0$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$,
- φ_2 sei ein einseitiger Parametertest der Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : \mu < \mu_0$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$.

Der einseitige Test soll dabei so konstruiert sein, dass eine Ablehnung eintritt, wenn das Stichprobenmittel signifikant kleiner als μ_0 ist. Im Folgenden soll die Macht beider Tests verglichen werden.

(a) Plotte mit **R** die Macht der Tests φ_1 und φ_2 bei $\mu_1 = 810$ in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang n für $n \in \{1, \dots, 100\}$ in eine gemeinsame Abbildung, wenn bekannt ist, dass $\sigma = 50$ gilt.

(b) Plotte mit **R** die Macht der Tests φ_1 und φ_2 bei $\mu_1 = 810$ in Abhängigkeit von der Standardabweichung σ für $\sigma \in (20, \dots, 300)$ in eine gemeinsame Abbildung, wenn bekannt ist, dass $n = 50$ gilt.

(c) Ermittle mit Hilfe von **R** welchen Stichprobenumfang n man jeweils wählen muss, damit für $\sigma = 150$ die Tests φ_1 und φ_2 bei $\mu_1 = 810$ jeweils eine Macht von $0,9$ haben.
Hinweis: Verwende eine Schleife über alle möglichen Stichprobenumfänge.