Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

SS 2014
15. 07. 2014

Stochastik I - Übungsblatt 11

Besprechung der Lösung in der Übung am 22. 07.

- Auf Übungsblatt 11 werden keine Punkte vergeben, der behandelte Stoff ist dennoch klausurrelevant.
- Es besteht die Möglichkeit Blatt 11 freiwillig zur Korrektur abzugeben.
- Bitte bis zum 20.07. im Hochschulportal zur Vorleistung anmelden.
- Nach bestandener Vorleistung bitte im Hochschulportal zur Klausur anmelden (bis spätestens 4 Tage vor der Klausur).

Aufgabe 1

Sei (X_1, X_2) eine Zufallsstichprobe, wobei $X_i \sim \mathrm{U}(\theta, \theta+1)$ mit $\theta \geq 0$ für $i = 1, 2$. Um die Nullhypothese $H_0 : \theta = 0$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : \theta > 0$ zu testen, betrachten wir die beiden folgenden Tests:

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \mathbb{1}_{\{x_1 > 0.95\}} \quad \text{und} \quad \varphi(x_1, x_2) = \mathbb{1}_{\{x_1 + x_2 > c\}}.$$

(a) Bestimme die Dichte von $X_1 + X_2$.

(b) Bestimme die Gütefunktion $\alpha_{\varphi_1}(\theta)$ von φ_1.

(c) Bestimme die Gütefunktion $\alpha_{\varphi_2}(\theta)$ von φ_2.

(d) Bestimme c so, dass die Wahrscheinlichkeiten für den Fehler erster Art bei φ_1 und φ_2 übereinstimmen.

(e) Beweise oder widerlege: φ_2 ist ein besserer Test als φ_1 , falls c aus Aufgabenteil (d) verwendet wird.

Aufgabe 2

Es soll geprüft werden, ob die mittlere Lebensdauer von zwei verschiedenen Bleiakku-Typen übereinstimmt. Dazu wurden Akkus beider Typen überprüft, wobei die Lebensdauern der Akkus vom Typ A durch eine Zufallsstichprobe $X = (X_1, \ldots, X_{n_1})$ mit $X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ und die Lebensdauern der Akkus vom Typ B durch eine Zufallsstichprobe $Y = (Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ mit $Y_1 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$ modelliert werden. Außerdem seien beide Zufallsstichproben unabhängig voneinander und die Varianz σ^2 sei unbekannt. Jeweils 50 beobachtete Lebensdauern für Typ A und Typ B sind in der Datei *Bleiakkus.txt* gegeben, welche von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden kann.

(a) Zeige, dass unter $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$$T(X,Y) = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}}{S_{n_1 n_2}} \sim t_{n_1+n_2-2},$$

wobei $S_{n_1 n_2}^2 = \frac{1}{n_1+n_2-2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X}_{n_1})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \overline{Y}_{n_2})^2\right)$.

(b) Konstruiere einen zweiseitigen statistischen Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ basierend auf einer Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_{n_1})$ und $y = (y_1, \dots, y_{n_2})$ um zu überprüfen, ob die mittleren Lebensdauern beider Bleiakku-Typen übereinstimmen. Betrachte dazu unter der Nullhypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ die Wahrscheinlichkeiten

$$p_1(x,y) = P_{(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)}(T(X,Y) \geq T(x,y)) \quad \text{und} \quad p_2(x,y) = P_{(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)}(T(X,Y) \leq T(x,y)).$$

Der sogenannte p-Wert $p(x,y)$ eines zweiseitigen statistischen Tests ist dann definiert als $p(x,y) = 2\min\{p_1(x,y), p_2(x,y)\}$. Zeige, dass der p-Wert für den in dieser Aufgabe betrachteten Test durch

$$p(x,y) = 2 \cdot \left(1 - P_{(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)}\left(T(X,Y) \leq |T(x,y)|\right)\right)$$

gegeben ist und dass die Nullhypothese genau dann verworfen wird, wenn $\alpha > p(x,y)$. Bestimme den p-Wert für die vorgegebenen Daten mit Hilfe von **R**.

(c) Führe den in Aufgabenteil (b) konstruierten Test unter der Verwendung von **R** zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch und interpretiere das Ergebnis.

(d) Ist die Annahme von gleichen Varianzen überhaupt gerechtfertigt? Überprüfe diese Annahme zum Niveau $\alpha = 0.05$ mit Hilfe von **R**.

Aufgabe 3

(a) Von der Geschäftsleitung einer Glühlampenfabrik wird behauptet, dass 90% der produzierten Glühlampen funktionstüchtig sind. Eine Verbraucherschutzorganisation vermutet jedoch, dass mehr Glühlampen nicht funktionstüchtig sind. Zur Überprüfung werden daher 500 zufällig ausgewählte Glühlampen untersucht, wobei festgestellt wird, dass 60 nicht funktionstüchtig sind. Führe einen asymptotischen Test zum Niveau $\alpha = 0.02$ durch, um zu überprüfen, ob die Behauptung der Geschäftsleitung widerlegt werden kann (dies soll nur geschehen, wenn zu viele getestete Glühlampen nicht funktionstüchtig sind).

(b) Die Wartezeiten an der Essensausgabe der Mensa können als Realisierungen der Zufallsstichprobe $(X_1, \dots, X_n)$ mit $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ angesehen werden. Das Studentenwerk behauptet, dass Studenten im letzten Semester im Mittel nur 2,5 Minuten an der Essensausgabe warten mussten. Zur Überprüfung dieser Aussage hat ein Student 15 mal seine eigenen Wartezeit gemessen und ist zu folgenden Ergebnissen gekommen:

$$1.96, 0.81, 4.9, 0.68, 3.55, 0.11, 1.44, 1.45, 6.29, 2.9, 0.08, 0.63, 0.33, 0.59, 2.73$$

Basierend auf dieser Stichprobe nimmt er an, dass die tatsächliche Wartezeit höher liegt als vom Studentenwerk behauptet. Führe einen asymptotischen Test zum Niveau $\alpha = 0.01$ durch, um zu überprüfen, ob die Behauptung des Studentenwerks widerlegt werden kann (dies soll nur geschehen, wenn die gemessenen Wartezeiten zu hoch sind).