Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

SS 2014
13. 05. 2014

# **Stochastik I** - Übungsblatt 3

Abgabe am 20. 05. **vor** Beginn der Übung

**Aufgabe 1** (8 Punkte)

Sei $(X_1, \dots, X_n)$ eine Zufallsstichprobe mit $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$. Bestimme die Verteilung von $\overline{X}_n$, sowie den Erwartungswert und die Varianz von $\overline{X}_n$ und $S_n^2$.

**Aufgabe 2** (3+2+3 Punkte)

Für eine reellwertige Zufallsvariable $X$ und $\alpha \in (0,1)$ ist das $\alpha$-Quantil $q_\alpha$ von $X$ definiert als der Wert, für den $P(X \le q_\alpha) = \alpha$. Wir bezeichnen mit $z_\alpha$ bzw. $\chi^2_{r,\alpha}$ die $\alpha$-Quantile der Standardnormalverteilung bzw. der $\chi^2$-Verteilung mit $r$ Freiheitsgraden.

(a) Zeige, dass $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\chi^2_{r,\alpha} - r}{\sqrt{2r}} = z_\alpha$.

(b) Nimm an du kennst $z_\alpha$ für alle $\alpha \in (0,1)$. Gib eine Näherungsformel zur Berechnung von $\chi^2_{r,\alpha}$ an und berechne damit $\chi^2_{100,0.05}$

(c) Es sei $Q_r : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $Q_r(\alpha) = \chi^2_{r,\alpha}$ die Quantilfunktion der $\chi^2$-Verteilung mit $r$ Freiheitsgraden. Schreibe eine Funktion in **R** die $Q_r(\cdot)$ approximativ laut Aufgabe (b) berechnet (die Anzahl $r$ der Freiheitsgrade sollte der Funktion übergeben werden). Plotte die Funktion für $r = 30$ zusammen mit der exakten Quantilfunktion (Hinweis: qchisq) in unterschiedlichen Farben in eine gemeinsame Abbildung.

**Aufgabe 3** (4,5+2,5+2 Punkte)

Sei $V_r$ eine $t_r$-verteilte Zufallsvariable.

(a) Berechne den Erwartungswert von $V_r$ für $r > 1$ und die Varianz von $V_r$ für $r > 2$.
Hinweis: $\int_0^\infty x^p e^{-x/2} dx < \infty$ für $p > -1$.

(b) Überprüfe, ob für $r = 1$ der Erwartungswert von $V_r$ ebenfalls berechnet werden kann.

(c) Plotte die Dichte $f_r$ von $V_r$ für $r = 1, 2, 4$ (in unterschiedlichen Farben) sowie die Dichte der Standardnormalverteilung (gestrichelt) in eine gemeinsame Grafik.

**Aufgabe 4** (3 Punkte)

Sei $(X_1, \dots, X_n)$ eine normalverteilte Zufallsstichprobe mit $X_i \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$ für $i = 1, \dots, n$. Zeige, dass dann

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{S_n} \sim t_{n-1}.$$