Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

SS 2014
27. 05. 2014

Stochastik I - Übungsblatt 5

Abgabe am 03. 06. **vor** Beginn der Übung

Aufgabe 1 (1,5+3+1,5+3 Punkte)

Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei X_i log-normalverteilt ist mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ (Schreibweise: $X_i \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$). Die Dichte von X_i ist wie folgt gegeben:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

(a) Zeige, dass die Zufallsvariable $Y_i = \log X_i$ normalverteilt ist mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

(b) Berechne die ersten beiden Momente von X_i.
Hinweis: Nutze, dass laut (a) auch gilt, dass $X_i = e^{Y_i}$ anstatt die Dichte von X_i zu verwenden.

(c) Konstruiere Schätzer $\hat{\mu}(X_1, \ldots, X_n)$ und $\hat{\sigma}^2(X_1, \ldots, X_n)$ für μ und σ^2 mit der Momentenmethode.

(d) Konstruiere Schätzer $\hat{\mu}(X_1, \ldots, X_n)$ und $\hat{\sigma}^2(X_1, \ldots, X_n)$ für μ und σ^2 mit der Maximum-Likelihood-Methode.

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte)

Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Zufallsstichprobe. Bestimme mit der Maximum-Likelihood-Methode Punktschätzer $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ für den Parametervektor θ, falls für alle $i = 1, \ldots, n$

(a) $X_i \sim \mathrm{Poi}(\theta)$ mit $\theta > 0$,

(b) $X_i \sim \mathrm{U}(1, \theta)$ mit $\theta > 1$,

(c) $X_i \sim \mathrm{B}(\theta + 1, 1)$ mit $\theta > -1$ (siehe Blatt 4 Aufgabe 2),

(d) X_i die folgende Dichte hat: $f_\theta(x) = \dfrac{1}{\theta_1} \exp\left\{\dfrac{-(x-\theta_2)}{\theta_1}\right\} \mathbb{1}_{[\theta_2,\infty)}(x)$, wobei $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ mit $\theta_1 > 0$ und $\theta_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (3+1 Punkte)

Ein Fahrkartenkontrolleur der SWU hat an einem Arbeitstag 15 Schwarzfahrer ertappt. Dabei hat er jeweils die folgenden Anzahlen von Fahrgästen mit gültigem Fahrschein überprüft, bevor er einen der Fahrgäste ohne gültigen Fahrschein angetroffen hat:

62 83 70 42 37 31 55 43 31 73 22 36 40 23 64.

(a) Bestimme den ML-Schätzer für den Anteil der Schwarzfahrer am gesamten Fahrgastaufkommen. Berechne den Schätzer für die gegebene konkrete Stichprobe.

(b) Überprüfe, ob der ML-Schätzer erwartungstreu ist.
Hinweis: Für $|x| < 1$ gilt $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} x^j = -\log(1-x)$.

Aufgabe 4 (2+1,5+2+1,5 Punkte)

Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \dots, X_n)$, wobei $X_i \sim \mathrm{Exp}(1/\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Es seien $\hat{\lambda}_1(X_1, \dots, X_n)$ der ML-Schätzer für λ und $\hat{\lambda}_2(X_1, \dots, X_n) = c \cdot \min\{X_1, \dots, X_n\}$ ein weitere Schätzer für λ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimme den ML-Schätzer $\hat{\lambda}_1(X_1, \dots, X_n)$.

(b) Zeige, dass für eine beliebige absolutstetig verteilte Zufallsstichprobe $(Y_1, \dots, Y_n)$ mit Verteilungsfunktion $F(\cdot)$ und Dichte $f(\cdot)$ das Minimum $m_n = \min\{Y_1, \dots, Y_n\}$ die folgende Dichte besitzt: $f_{m_n}(x) = nf(x)(1 - F(x))^{n-1}$.
Hinweis: Bestimme zunächst die Verteilungsfunktion $F_{m_n}(\cdot)$.

(c) Bestimme die Konstante c so, dass $\hat{\lambda}_2(X_1, \dots, X_n)$ ein erwartungstreuer Schätzer für λ ist.

(d) Entscheide anhand des MQ-Fehlers, ob $\hat{\lambda}_1(X_1, \dots, X_n)$ oder $\hat{\lambda}_2(X_1, \dots, X_n)$ ein besserer Schätzer für λ ist.