Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

SS 2014
03. 06. 2014

# **Stochastik I** - Übungsblatt 6

Abgabe am 17. 06. **vor** Beginn der Übung

**Zur Bearbeitung von Übungsblatt 6 gibt es zwei Wochen Zeit!**
**Am 10. 06. findet statt der Übung eine Vorlesung statt!**

**Aufgabe 1** (4+4 Punkte)
Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei $X_i \sim \mathrm{Bin}(1, p)$ mit Parameter $p \in (0, 1)$ für $i = 1, \ldots, n$.

(a) Bestimme den ML-Schätzer $\widehat{p^2}(X_1, \ldots, X_n)$ für $p^2$ und untersuche, ob dieser erwartungstreu ist.

(b) Betrachte die beiden Schätzer $\hat{p}_1(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}_n$ und $\hat{p}_2(X_1, \ldots, X_n) = \dfrac{n\overline{X}_n + 1}{n + 1}$ für $p$. Kann man anhand des MQ-Fehlers entscheiden, welcher Schätzer besser ist?

**Aufgabe 2** (5+3 Punkte)
Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei $X_i \sim \mathrm{U}(\theta, \theta + 1)$ mit Parameter $\theta \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$. Es seien zwei Schätzer $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ für $\theta$ gegeben durch

$$\hat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}_n - \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \hat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n) = \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

(a) Welcher der beiden Schätzer hat einen geringeren MQ-Fehler?

(b) Berechne für beide Schätzer die untere Schranke für ihre Varianz, die sich aus der Ungleichung von Cramér-Rao ergibt. Was ist zu beobachten und wie ist das zu erklären?

**Aufgabe 3** (3+5 Punkte)
Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ mit $n \geq 3$, wobei $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$ für $i = 1, \ldots, n$, und betrachte den Schätzer $\hat{\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = c_n / \overline{X}_n$ für $\lambda$.

(a) Bestimme $c_n$ so, dass $\hat{\lambda}$ erwartungstreu ist.
Hinweis: Nutze die Ergebnisse von Aufgabe 1 auf Übungsblatt 3.

(b) Gib mit Hilfe der Ungleichung von Cramér-Rao eine untere Schranke für die Varianz von $\hat{\lambda}$ an. Überprüfe, ob alle Voraussetzungen zur Anwendung der Ungleichung erfüllt sind.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Für eine Exp($\lambda$)-verteilte Zufallsvariable $X$ gilt bekanntlich, dass $\lambda = 1/\mathbb{E}X = 1/\sqrt{\operatorname{Var} X}$. Daher betrachten wir die folgenden Schätzer für $\lambda$ basierend auf einer Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$:

$$\hat{\lambda}_1(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{\overline{X}_n}, \qquad \hat{\lambda}_2(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{\sqrt{S_n^2}} \quad \text{und} \quad \hat{\lambda}_3(X_1, \ldots, X_n) = \frac{n-1}{n\overline{X}_n}.$$

Die Güte der gegebenen Schätzer soll empirisch in **R** analysiert werden. Geh dazu für jeden Schätzer $\hat{\lambda}_i$ wie folgt vor. Für gegebenes $\lambda > 0$ generiere 100 mal eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_{1000}$ als Realisierung der Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_{1000})$ und ermittle den Schätzwert $e = \hat{\lambda}_i(x_1, \ldots, x_{1000})$. Die dadurch berechneten Schätzwerte $e_1, \ldots, e_{100}$ können als Realisierungen des (zufälligen) Schätzers $\hat{\lambda}_i(X_1, \ldots, X_{1000})$ angesehen werden. Mit Hilfe des Stichprobenmittels und der Stichprobenvarianz können so Bias und Varianz (und damit auch MQ-Fehler) von $\hat{\lambda}_i(X_1, \ldots, X_{1000})$ aus $e_1, \ldots, e_{100}$ geschätzt werden.

Bestimme für jeden der oben gegebenen Schätzer den MQ-Fehler für $\lambda \in \{0, 0.1, 0.2, \ldots, 4.9, 5\}$ und plotte die MQ-Fehler von $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ und $\hat{\lambda}_3$ in Abhängigkeit von $\lambda$ in eine gemeinsame Abbildung. Verwende unterschiedliche Farben für die verschiedenen Schätzer.