Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

SS 2014
17. 06. 2014

Stochastik I - Übungsblatt 7

Abgabe am 24. 06. **vor** Beginn der Übung

Aufgabe 1 (1+1+2+2+2+2 Punkte)

(a) Betrachte eine Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei die Verteilung der Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_n$ zu einer parametrischen Familie von Verteilungen $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ gehört und es sei $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ ein Schätzer für θ. Beweise oder widerlege folgende Konsistenzaussagen:

(i) $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}_n - \frac{1}{2}$ ist stark konsistent, falls $X_1 \sim \mathrm{U}(\theta, \theta + 1)$ mit $\theta \in \mathbb{R}$ (siehe Blatt 6, Aufgabe 2),

(ii) $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n) = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ ist schwach konsistent, falls $X_1 \sim \mathrm{U}(\theta, \theta + 1)$ mit $\theta \in \mathbb{R}$ (siehe Blatt 6, Aufgabe 2),

(iii) $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n) = n \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ ist schwach konsistent, falls $X_1 \sim \mathrm{Exp}(1/\theta)$ mit $\theta > 0$ (siehe Blatt 5, Aufgabe 4),

(iv) $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}_n$ ist schwach konsistent, falls $X_1 \sim \mathrm{Poi}(\theta)$ mit $\theta > 0$ (bearbeite diese Aufgabe ohne zu betrachten ob $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ stark konsistent ist; siehe Blatt 5, Aufgabe 4),

(v) $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n) = 2 \log \overline{X}_n - \frac{1}{2} \log \overline{X_n^2}$ ist stark konsistent, falls $X_1 \sim \mathrm{LN}(\theta, \sigma^2)$ mit $\theta \in \mathbb{R}$ (σ^2 sei bekannt; siehe Blatt 5, Aufgabe 1).

(b) Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei $X_1 \sim \mathrm{N}(\mu, 1)$ mit $\mu \in \mathbb{R}$. Beobachtbar sei jedoch nur die Zufallsstichprobe $Y_1, \ldots, Y_n$ mit $Y_i = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(X_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass $Y_i \sim \mathrm{Bin}(1, \Phi(\mu))$ für $i = 1, \ldots, n$ und folgere, dass $\hat{\mu}(Y_1, \ldots, Y_n) = z_{\overline{Y}_n}$ ein stark konsistenter Schätzer für μ ist. (z_α bezeichne das α-Quantil der Standardnormalverteilung.)

Aufgabe 2 (2+2+3 Punkte)

Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Zufallsstichprobe, wobei $X_1 \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Betrachte den ML-Schätzer $\hat{\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}_n$ für λ.

(a) Zeige, dass der Schätzer $\hat{\lambda}(X_1, \ldots, X_n)$ asymptotisch normalverteilt ist.

(b) Berechne mit Hilfe von Teil (a) einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass der Schätzer $\hat{\lambda}(X_1, \ldots, X_n)$ von λ um mehr als 0.5 abweicht für $n = 20$ und $\lambda = 10$.

(c) Bestimme mit Hilfe von (a) den minimalen Stichprobenumfang n, so dass für $\lambda \leq 10$ die approximative Wahrscheinlichkeit, dass $\hat{\lambda}(X_1, \ldots, X_n)$ von λ um mehr als 0.1 abweicht, kleiner als 0.01 ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \dots, X_n)$, wobei $X_1 \sim \mathrm{Bin}(1, p)$ mit $p \in (0, 1)$. Zeige, dass der ML-Schätzer $\hat{p}(X_1, \dots, X_n)$ für p schwach konsistent und asymptotisch normalverteilt ist, ohne dabei den Schätzer $\hat{p}(X_1, \dots, X_n)$ auszurechnen bzw. seine konkrete Form zu verwenden. Gib auch die Fisher-Information $I(p) = \mathbb{E}_p\left(\left(\frac{\delta}{\delta p} \log L(X_1; p)\right)^2\right)$ an.

Hinweise:

- Wenn die Abbildung $p \to \log L(x, p)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ konkav ist, dann ist die Abbildung $p \to L(x_1, \dots, x_n; p)$ unimodal
- Eine zweimal differenzierbare Abbildung $x \to f(x)$ ist genau dann konkav, wenn $\frac{\delta^2}{\delta x^2} f(x) \leq 0$ für alle x aus dem Definitionsbereich von f

Aufgabe 4 (1,5+3+1,5 Punkte)

Es sei $X \sim \mathrm{F}_{r,s}$ mit Freiheitsgraden $r, s \in \mathbb{N}$.

(a) Berechne den Erwartungswert von X falls $s \geq 3$.

(b) Berechne die Varianz von X falls $s \geq 5$.

(c) Zeige, dass $F_{r,s,\alpha} = \frac{1}{F_{s,r,1-\alpha}}$ für $\alpha \in (0, 1)$, wobei $F_{r,s,\alpha}$ das α-Quantil der F-Verteilung mit r, s Freiheitsgraden bezeichne.