

Stochastik I - Übungsblatt 8

Abgabe am 01. 07. vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (2+2+2+2 Punkte)

Für die Gewichte von Warenverpackungen wird angenommen, dass sie durch unabhängige $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n beschrieben werden können, wobei μ und σ^2 unbekannt seien.

- Berechne ein symmetrisches zweiseitiges Konfidenzintervall für μ zum Niveau $\gamma = 0.99$, falls eine Stichprobe aus dem Warenlager folgende Gewichte (in kg) ergab: 20.1, 20.2, 20.15, 20.5, 19.9, 20.05, 20, 19.8, 20.25, 20.4.
- Konstruiere ein einseitiges Konfidenzintervall für μ zum Niveau γ der Form $[\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), \infty)$, falls σ^2 bekannt ist.
- Berechne das Konfidenzintervall aus (a) wenn die Varianz σ^2 bekannt ist. Wie groß darf die bekannte Varianz σ^2 höchstens sein, damit die Länge des Intervalls maximal 0.3 ist?
- Es sei nun bekannt, dass $\sigma = 0.2$. Wie hoch müsste der Erwartungswert μ mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Warenverpackung mehr als 20 kg wiegt, mindestens 0.95 beträgt?

Aufgabe 2 (2+4 Punkte)

Sei (X_1, \dots, X_n) eine Zufallsstichprobe, wobei $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt und $\sigma^2 > 0$ bekannt.

- Wie groß muss der Umfang n der Zufallsstichprobe sein, damit die Länge des Konfidenzintervalls für den Parameter μ zum Niveau $\gamma = 0.95$ höchstens σ beträgt?
- Wie groß sollte man die „Risiko“-Wahrscheinlichkeiten α_1 und α_2 mit $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ und $\alpha \in (0, 1)$ wählen, damit die Länge des Konfidenzintervalls für μ zum Niveau $\gamma = 1 - \alpha$ am kürzesten ist?
Hinweis: Betrachte die Aufgabe als ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen und nutze das Verfahren der Lagrange-Multiplikatoren.

Aufgabe 3 (3+3+1+3 Punkte)

Betrachte die Zufallsstichprobe (X_1, \dots, X_n) , wobei $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.

- (a) Konstruiere ein einseitiges Konfidenzintervall der Form $[0, \bar{\lambda}(X_1, \dots, X_n)]$ für λ zum Niveau $\gamma = 1 - \alpha$ basierend auf der Stichprobenfunktion \bar{X}_n mit Hilfe der Ungleichung von Markov mit $p = 1$.
- (b) Konstruiere ein zweiseitiges Konfidenzintervall für λ zum Niveau $\gamma = 1 - \alpha$ basierend auf der Stichprobenfunktion \bar{X}_n mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyscheff.
- (c) Vergleiche die Längen der Konfidenzintervalle aus (a) und (b). Welches Konfidenzintervall ist kürzer (bei welchem Stichprobenumfang)?
- (d) Konstruiere ein zweiseitiges Konfidenzintervall für λ zum Niveau $\gamma = 1 - \alpha$ basierend auf der Verteilung der Stichprobenfunktion $2n\lambda\bar{X}_n$. Betrachte beliebige α_1 und α_2 mit $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

Hinweise: Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ für ein $p \geq 1$. Dann besagt die Markov-Ungleichung, dass für jedes $\varepsilon > 0$

$$P(|X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{\varepsilon^p}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Größe von Konfidenzintervallen zu verschiedenen Niveaus und bei unterschiedlichen Stichprobenumfängen grafisch veranschaulicht werden. Simuliere hierfür drei Stichproben von unabhängigen und standardnormalverteilten Zufallsvariablen vom Umfang 10, 100 und 1.000. Gehe nun für die Analyse davon aus, dass der Erwartungswert unbekannt ist, es sei jedoch bekannt, dass er zwischen -1 und 1 liegt. Die Varianz sei bekannt. Plote nun die Konfidenzintervalle für den Erwartungswert zum Niveau $\gamma \in (0, 1)$ in eine Abbildung, indem du auf der x -Achse die Niveaus abträgst, und auf der y -Achse die untere und obere Grenze des Konfidenzintervalls zum jeweiligen Niveau γ . Plote die Kurven für alle 3 Stichprobenumfänge in eine gemeinsame Abbildung. Verwende zur besseren Unterscheidung für den Stichprobenumfang 10 gestrichelte, für 100 durchgezogene und für 1000 fette Linien. Zeichne die x -Achse rot in die Abbildung.