Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

SS 2014
01. 07. 2014

# **Stochastik I** - Übungsblatt 9

Abgabe am 08. 07. **vor** Beginn der Übung

**Aufgabe 1** (2+3+2+2 Punkte)

In zwei Städten wurden Einwohner nach der Höhe ihres Einkommens (in 1000 Euro) gefragt. Man nimmt an, dass die Einkommen in Stadt 1 als Realisierung eine Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_{n_1})$ mit $X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und die Einkommen in Stadt 2 als Realisierung einer Zufallsstichprobe $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ mit $Y_1 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ betrachtet werden können. Zusätzlich kann angenommen werden, dass beide Stichproben unabhängig voneinander sind. Die Befragung lieferte das folgende Ergebnis:

Stadt 1: $2.3, 1.7, 2.0, 3.3, 1.9, 1.8, 3.1, 2.5, 2.7$

Stadt 2: $1.2, 1.0, 3.0, 2.5, 1.6, 1.7, 3.3, 3.7, 1.2, 2.3, 2.7, 2.9, 1.7$

(a) Berechne ein zweiseitiges minimales Konfidenzintervall für die Varianz $\sigma_1^2$ zum Niveau $\gamma = 1 - \alpha = 0.98$, falls der Erwartungswert $\mu_1$ unbekannt ist. Setze $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$.

(b) Berechne ein zweiseitiges minimales Konfidenzintervall für die Varianz $\sigma_1^2$ zum Niveau $\gamma = 1 - \alpha = 0.98$, falls bekannt ist, dass $\mu_1 = 2.0$. Setze $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$. Vergleiche die Länge des Konfidenzintervalls mit der des Intervalls aus Teilaufgabe (a).

(c) Berechne ein zweiseitiges symmetrisches minimales Konfidenzintervall für die Differenz der mittleren Einkommen in beiden Städten zum Niveau $\gamma = 0.95$, falls bekannt ist, dass $\sigma_1^2 = 0.3$ und $\sigma_2^2 = 0.75$.

(d) Konstruiere ein minimales Konfidenzintervall der Form $[0, \overline{\theta}(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2})]$ für den Quotienten $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ zum Niveau $\gamma$, falls die Erwartungswerte $\mu_1$ und $\mu_2$ **bekannt** sind.

**Aufgabe 2** (2,5+3,5+2 Punkte)

Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei $X_1 \sim \mathrm{U}(\theta, \theta + 2)$ mit Parameter $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Konstruiere basierend auf der Stichprobenfunktion $\overline{X}_n$ ein zweiseitiges symmetrisches asymptotisches Konfidenzintervall für $\theta$ zum Niveau $\gamma$.

(b) Konstruiere basierend auf der Stichprobenfunktion $m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ ein exaktes minimales Konfidenzintervall der Form $[m_n - c, \infty)$ für $\theta$ zum Niveau $\gamma$.

(c) Betrachte nun das alternative Konfidenzintervall $[m_n - c, m_n + c]$ für $\theta$ mit $c$ aus Aufgabenteil (b). Bestimme den kleinsten Stichprobenumfang $n$ für den das Konfidenzintervall zum Niveau $\gamma = 0.9$ maximal eine Länge von 1 hat.

**Aufgabe 3** (3+3+5 Punkte)

(a) Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$. Konstruiere basierend auf der Stichprobenfunktion $\overline{X}_n$ ein einseitiges asymptotisches Konfidenzintervall der Form $[0, \overline{\lambda}(X_1, \ldots, X_n)]$ für $\lambda$ zum Niveau $\gamma$ ohne den Satz von Slutsky zu nutzen. Wie verändert sich das Intervall, wenn der Satz von Slutsky genutzt wird?

(b) Konstruiere für die Stichprobe aus Teilaufgabe (a) basierend auf der Stichprobenfunktion $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ ein exaktes minimales einseitiges Konfidenzintervall der Form $[0, \overline{\lambda}(X_1, \ldots, X_n)]$ für $\lambda$ zum Niveau $\gamma$.

(c) Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei $X_1$ folgende Zähldichte hat

$$P(X_1 = k) = \begin{cases} 1 - 2\theta, & \text{falls } k = 0, \\ \theta, & \text{falls } k = 1 \text{ oder } k = 2, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit einem unbekannten Parameter $\theta \in (0, \frac{1}{2})$.
Konstruiere basierend auf der Stichprobenfunktion $\frac{1}{3}\overline{X}_n$ ein zweiseitiges symmetrisches asymptotisches Konfidenzintervall für $\theta$ zum Niveau $\gamma$ ohne den Satz von Slutsky zu nutzen. Wie verändert sich das Intervall, wenn der Satz von Slutsky genutzt wird?