Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2015

Räumliche Statistik – Übungsblatt 12

Präsentation in der Übung am 15.07.15

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei $\mathbb{N}^{(0)} = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(\{o\}) > 0\}$ die Menge derjenigen Zählmaße aus $\mathbb{N}$, die im Nullpunkt ein Atom besitzen. Zeige $P_N^0(\mathbb{N}^0) = 1$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Sei $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ beliebig mit $0 < \nu_d(B) < \infty$. Die reduzierte Palmsche Verteilung $P_N^! : \mathcal{N} \longrightarrow [0,1]$ ist definiert durch

$$P_N^!(A) = \frac{1}{\lambda \nu_d(B)} \int_{\mathbb{N}} \sum_{n: s_n(\varphi) \in B} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_{s_n(\varphi)}\varphi - \delta_o) P_N(\mathrm{d}\varphi),$$

wobei $s_1(\varphi), s_2(\varphi), \ldots$ die Atome von φ bezeichnen. Zeige, dass $P_N^!$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$ ist.

Aufgabe 3 (4 + 3 + 3)
Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein beliebiges zufälliges Zählmaß mit Verteilung P_N über $\mathcal{N}$ und reduziertem Campbellschen Maß $\gamma^!$. Die Atome von φ werden mit $s_1(\varphi), s_2(\varphi), \ldots$ bezeichnet. Sei ferner $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ eine nicht-negative $(\mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}([0,\infty))$-messbare Funktion.

(a) Zeige

$$\int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \gamma^!(\mathrm{d}(\varphi, x)) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi - \delta_x, x) \varphi(\mathrm{d}x) P_N(\mathrm{d}\varphi).$$

Sei ab jetzt $N = \{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$.

(b) Folgere aus Teilaufgabe (a), dass gilt:

$$\mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} f(\varphi - \delta_{s_n(\varphi)}, s_n(\varphi)) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\, f(\varphi, x) \mathrm{d}x.$$

(c) Sei $r > 0$ beliebig. Berechne die erwartete Anzahl aller Atome s des Punktprozesses N in $[0,1]^d$, für die genau zwei, jeweils von s verschiedene Atome s', s'' mit $s' \neq s''$ des Punktprozesses N existieren, sodass $|s - s'| < r$ und $|s - s''| < r$ gilt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei $S = \{S_n, n \geq 1\}$ die messbare Indizierung eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität $\lambda > 0$. Für $A, B \subset \mathbb{R}^2$ definieren wir die Minkowski-Addition durch $A \oplus B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Für beliebige Punkte $a, b \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir die Strecke zwischen a und b mit $[a, b]$. Es sei nun $G = (V, E)$ ein Graph in $\mathbb{R}^2$ mit zufälliger Knotenmenge $V = S$ und Kantenmenge E. Unter der Bedingung, dass die Knotenmenge V des Graphen gegeben sind, ist die Kantenmenge deterministisch und wie folgt definiert: Für $x, y \in V$ gilt $(x, y) \in E$ genau dann, wenn $\#\{n : S_n \in [x, y] \oplus B(o, 1)\} = 2$. Berechne

$$\mathbb{E}\,\#\{n : (o, S_n) \in E \mid o \in V\}.$$