Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2015

Räumliche Statistik – Übungsblatt 2

Präsentation in der Übung am 29.04.15

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweise die sogenannte Independent-Thinning-Eigenschaft des homogenen Poisson-Prozesses, d.h. zeige: Wenn jeder der Punkte $\{S_n, n \geq 1\}$ eines homogenen Poisson-Prozesses auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\lambda > 0$ aufgrund einer Folge unabhängiger Bernoulli-Experimente gelöscht oder erhalten wird, erhält man einen homogenen Poisson-Prozess mit Intensität $p\lambda$. Dabei bezeichnet $p \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt erhalten bleibt.

Aufgabe 2 (3 + 2 Punkte)

Sei $N = \{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß μ. Seien $B, B' \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $B \subset B'$, $0 < \mu(B)$ und $\mu(B') < \infty$. Sei ferner $n \geq 0$ beliebig.

(a) Zeige $\mathbb{E}(N_B \mid N_{B'} = n) = n\mu(B)/\mu(B')$.

(b) Zeige $\mathbb{E}(N_{B'} \mid N_B = n) = \mu(B' \setminus B) + n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\lambda > 0$ und sei $N = \{N_B, B \in \mathcal{B}((0,\infty))\}$ ein Poisson-Prozess auf $(0,\infty)$ mit Intensitätsfunktion $\lambda(x) = \lambda \exp(-x)$ für jedes $x \in (0,\infty)$. Definiere die Abbildung $\mathbf{T} : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty), x \mapsto 1/x$. Zeige, dass durch $N' = \{N'_B, B \in \mathcal{B}((0,\infty))\}$ mit $N'_B = N_{\mathbf{T}^{-1}(B)}$ für alle $B \in \mathcal{B}((0,\infty))$ ein Poisson-Prozess gegeben ist und bestimme das dazugehörige Intensitätsmaß.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 2 + 1 Punkte)

Sei $\{S_n, n \geq 1\}$ die messbare Indizierung eines Poissonprozesses $N = \{N_B, B \in \mathcal{B}(W)\}$ auf $W = [0,1]^2$ mit Intensitätsfunktion $\lambda : W \longrightarrow [0,\infty)$.

(a) Zeige

$$\mathbb{P}(S_1 \in B_1, \ldots, S_n \in B_n, N_W = n) = \frac{1}{n!} \exp\left(-\int_W \lambda(x)\mathrm{d}x\right) \int_{B_1} \ldots \int_{B_n} \lambda(x_1)\ldots\lambda(x_n)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

für jedes $n \geq 0$ und für alle $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(W)$.

(b) Nun betrachten wir den Fall, dass die Intensitätsfunktion durch $\lambda_\theta((x,y)) = 2000(\theta+1)x^\theta$ für $(x,y) \in W$ gegeben ist, wobei $\theta > 0$. Das Ziel ist, für ein beobachtetes Punktmuster $\{(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$ den Parameter θ mit der Maximum-Likelihood-Methode zu schätzen. Zeige, dass die Log-Likelihood-Funktion $\log L$ wie folgt gegeben ist:

$$\log L(\{(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\},\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log \lambda_\theta((x_i,y_i)) - \int_0^1 \int_0^1 \lambda_\theta((x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(c) Bestimme den Maximum-Likelihood Schätzer $\widehat{\theta}$ für θ.

(d) Lade die Textdatei

`Blatt2dat.txt`

von der Vorlesungshomepage herunter. Die Datei enthält Punkte einer Realisierung eines Poissonprozesses mit Intensitätsfunktion λ_θ. Schreibe ein Programm (mit R oder Matlab), um den Schätzwert für θ zu berechnen.