Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2015

Räumliche Statistik – Übungsblatt 3

Präsentation in der Übung am 06.05.15

Aufgabe 1 (2 + 4 + 2 + 1 Punkte)
Sei $\{S_n, n \geq 1\}$ die messbare Indizierung eines Poisson-Prozesses in $\mathbb{R}^2$ mit Intensitätsmaß μ. Sei $|S_1| \leq |S_2| \leq \ldots$ und sei μ absolutstetig bzgl. des zwei-dimensionalen Lebesguemaßes ν_2.

(a) Zeige, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 kein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $aS_1 = S_2$.

Nach Teilaufgabe (a) definieren die Punkte S_1, S_2 und der Ursprung $o \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck $A = \triangle(o, S_1, S_2)$.

(b) Sei $\lambda > 0$ und $\mu = \lambda\nu_2$. Zeige

$$\mathbb{E}\,\nu_2(A) = \frac{4}{3\pi^2\lambda}.$$

(c) Sei μ definiert durch

$$\mu(B) = \int_B 1 + \exp\left(\frac{-|x|^2}{2}\right) \mathrm{d}x$$

für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Schreibe ein Programm (mit R oder Matlab) zur Simulation von S_1, S_2 und generiere damit eine Folge $A_1, A_2, \ldots$ von zufälligen Dreiecken. Verwende das Programm, um $\mathbb{E}\,\nu_2(A)$ mit Hilfe von

$$\frac{1}{1000}\sum_{n=1}^{1000} \nu_2(A_n)$$

zu schätzen.

(d) Erweitere das Programm aus Teilaufgabe (c), um die Stichprobenvarianz der Folge $\nu_2(A_1), \nu_2(A_2), \ldots$ zu bestimmen.

Aufgabe 2 (2 + 4 Punkte)
Sei $d \geq 2$ und $\lambda > 0$. Seien $T_1, T_2, \ldots$ i.i.d. mit $T_1 \sim \mathrm{Exp}(1)$ und $V_1, V_2, \ldots$ i.i.d. mit $V_1 \sim \mathrm{U}(S_d)$, wobei $S_d = \{y \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Weiter seien $T_1, T_2, \ldots$ und $U_1, U_2, \ldots$ voneinander unabhängig. Sei $R_1, R_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit

$$R_n = \left(\frac{1}{\lambda\kappa_d}\sum_{k=1}^{n} T_k\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Hier bezeichnet κ_d das Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel.

(a) Sei $d = 2$ und $U \sim \mathrm{U}([0, 2\pi))$. Zeige $V_1 \stackrel{D}{=} (\cos U, \sin U)^\top$.

(b) Zeige, dass $\{R_n V_n, n \geq 1\}$ die messbare Indizierung eines homogenen Poisson-Prozesses in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität λ ist.

Aufgabe 3 (3 + 1 + 1 Punkte)
Sei $N = \{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$. Sei $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ beliebig mit $0 < \nu_d(W) < \infty$. Dann ist $\widehat{\lambda}_W = N_W/\nu_d(W)$ ein erwartungstreuer Schätzer für λ.

(a) Sei $W_1, W_2, \ldots$ eine Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\lim_{n\to\infty} \nu_d(W_n) = \infty$. Zeige
$$\sqrt{\frac{\nu_d(W_n)}{\lambda}}(\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda) \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0, 1)$$
und folgere
$$\sqrt{\frac{\nu_d(W_n)}{\widehat{\lambda}_{W_n}}}(\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda) \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0, 1).$$

(b) Konstruiere mit dem Resultat aus Teilaufgabe (a) einen asymptotischen Hypothesentest zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$, um zu testen, ob $\lambda = \lambda_0$ für ein gegebenes $\lambda_0 > 0$.

(c) Lade die Textdatei

`Blatt3dat.txt`

von der Vorlesungshomepage herunter. Die Datei enthält Punkte einer Realisierung eines homogenen Poisson-Prozesses in $[0, 1000]^2$ mit einer gewissen Intensität $\lambda > 0$. Schreibe ein Programm (mit R oder Matlab), um mit Teilaufgabe (c) zum Niveau $\alpha = 0.05$ zu testen, ob $\lambda = 0.2$.