Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2015

# **Räumliche Statistik** – Übungsblatt 4

Präsentation in der Übung am 20.05.15

**Aufgabe 1** (4 Punkte)
Sei $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y-x| \le r\}$ die $d$-dimensionale Kugel mit Mittelpunkt $x$ und Radius $r \ge 0$ und sei $\kappa_d = \nu_d(B(o,1))$. Außerdem sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$. Dann heißt die Funktion $H_S : [0,\infty) \to [0,1]$ mit $H_S(r) = \mathbb{P}(N_{B(o,r)} > 0)$ die sphärische Kontaktverteilungsfunktion des Poisson-Prozesses, wogegen die Funktion $D : [0,\infty) \to [0,1]$ mit

$$D(r) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}(N_{B(o,r)} > 1 \mid N_{B(o,\varepsilon)} > 0)$$

Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion des Poisson-Prozesses genannt wird. Zeige, dass

$$H_s(r) = D(r) = 1 - \exp(-\lambda\kappa_d r^d)$$

für jedes $r > 0$.

**Aufgabe 2** (2 + 3 + 3 + 3 Punkte)

(a) Generiere 10 Realisierungen eines Poisson-Prozesses $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ auf $W = [0,100]^2$ mit Intensitätsfunktion $\lambda(x_1,x_2) = 10^{-5}x_1x_2$ für $x_1, x_2 \in [0,100]$.

(b) Implementiere den Intensitätschätzer

$$\widehat{\lambda}_h(x) = \frac{N_{x+[-h/2,h/2]^2\cap W}}{\nu_2(x+[-h/2,h/2]^2 \cap W)},$$

mit $x \in W$ und der Notation $x + B = \{x+b, b \in B\}$ für $B \subset \mathbb{R}^2$. Der Intensitätsschätzer soll dabei als Methode implementiert werden, der sowohl $x \in W$ als auch $h > 0$ übergeben wird.

(c) Bestimme für jede der 10 Realisierungen aus Teilaufgabe (a) eine optimale Bandbreite $\widehat{h}$ aus der Menge $H = \{11, 12, \ldots, 30\}$ mittels Likelihood-Cross-Validation.

(d) Berechne für jede der 10 Realisierungen die Approximation

$$\widetilde{e}_h = \frac{1}{100^2}\sum_{i,j=0}^{99}\left(\widehat{\lambda}_h\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \lambda\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

des mittleren quadratischen Fehlers für alle $h \in H$. Minimiert die in Teilaufgabe (d) ermittelte optimale Bandbreite $\widehat{h}$ auch den mittleren quadratischen Fehler unter allen möglichen Bandbreiten $h \in H$?

**Aufgabe 3** (3 + 3 + 3 + 3 + 3 Punkte)
Sei $\{S_n, n \geq 1\}$ ein Punktprozess im $\mathbb{R}^d$ mit dem Intensitätsmaß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ und sei $f : \mathbb{R}^d \cup \{\infty\} \longrightarrow [0, \infty)$ eine nichtnegative Borel-messbare Funktion mit $f(\infty) = 0$

(a) Zeige

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

*Hinweis: Führe den Beweis mittels algebraischer Induktion nach $f$*

(b) Sei $U_1, U_2, \ldots$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $U_1 \sim \mathrm{U}([0,1]^d)$, die ferner unabhängig vom Punktprozess $\{S_n\}$ ist. Zeige

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n + U_n)\right) = \int_{[0,1]^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x+u)\mu(\mathrm{d}x)\nu_d(\mathrm{d}u).$$

(c) Sei $d \geq 1$. Sei $\{S_n\}$ ein Punktprozess in $\mathbb{R}^d$ mit Intensitätsmaß $\mu = \lambda\nu_d$. Definiere die Zufallsvariable $X = \sum_{|S_n|<1} |S_n|$. Bestimme $\mathbb{E}\, X$.

(d) Sei von nun an $\{S_n\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda$. Berechne $\operatorname{Var} X$.

(e) Definiere den Punktprozess $\{S'_n, n \geq 1\}$, wobei $S'_{2n-1} = S_n$ und $S'_{2n} = S_n + U_n$, wobei die $U_1, U_2, \ldots$ wie in Teilaufgabe (b) gegeben sind. Bestimme das Intensitätsmaß von $\{S'_n, n \geq 1\}$.