Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

ulm university universität ulm

Sommersemester 2015

Räumliche Statistik – Übungsblatt 5

Präsentation in der Übung am 27.05.15

Für diese und alle weiteren Übungen seien alle betrachteten Punktprozesse einfache Punktprozesse, wenn es nicht anders explizit angegeben wird.

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Zeige mit Hilfe der Aussage von Aufgabe 4 auf Blatt 1, dass die Verteilung eines Punktprozesses $\{S_n, n \geq 1\}$ eindeutig durch das erzeugende Funktional $\mathbf{G}$ von $\{S_n, n \geq 1\}$ bestimmt ist. In Aufgabe 4, Blatt 1 wurde gezeigt, dass die Verteilung eines Punktprozesses eindeutig durch seine Leerwahrscheinlichkeiten gegeben ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Sei $\{S_n, n \geq 1\}$ ein Punktprozess mit Intensitätsmaß μ und erzeugendem Funktional $\mathbf{G}$. Bezeichne

$$\tilde{\mathcal{H}} = \{f : \mathbb{R}^d \cup \{\infty\} \to (0,1], \text{ es existiert } B_f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \text{ mit } f(x) = 1 \text{ für alle } x \notin B_f\} \subset \mathcal{H}$$

Zeige, dass für alle $f \in \tilde{\mathcal{H}}$ gilt

$$\exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \log f(x) \mu(\mathrm{d}x)\right) \leq \mathbf{G}(f) \leq 1.$$

Bemerkung: Der Unterschied zwischen $\tilde{\mathcal{H}}$ und $\mathcal{H}$ aus der Vorlesung besteht darin, dass die Funktionen in $\tilde{\mathcal{H}}$ nie den Wert Null annehmen dürfen. Diese Voraussetzung ist für die Definition des erzeugenden Funktionals nicht notwendig.

Aufgabe 3 (2.5 + 2.5 Punkte)

(a) Konstruiere einen Punktprozess $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ in $\mathbb{R}^d$, sodass $\mathbb{E}\, N_B = \infty$ für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(B) > 0$.
Hinweis: Konstruiere zunächst einen Punktprozess, sodass $\mathbb{E}\, N_{[0,1]^d} = \infty$.

(b) Konstruiere für jedes $d \geq 1$ einen Punktprozess $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ mit Intensitätsmaß ν_d, der nicht stationär ist.
Hinweis: Der gesuchte Punktprozess kann mit Hilfe zwei unabhängiger Poisson-Prozesse konstruiert werden.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei $d \geq 1$ und $\{S_n, n \geq 1\}$ ein stationärer Punktprozess in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\lambda > 0$. Sei ferner $U_1, U_2, \ldots$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvektoren in $\mathbb{R}^d$, die unabhängig von $\{S_n, n \geq 1\}$ ist. Zeige, dass $\{S_n + U_n, n \geq 1\}$ ebenfalls ein stationärer Punktprozess in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität λ ist.