Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2015

Räumliche Statistik – Übungsblatt 6

Präsentation in der Übung am 03.06.15

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)
Sei $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein zufälliges Maß und sei $\mathbf{L} : \mathcal{H}' \longrightarrow [0,1]$ für $f \in \mathcal{H}'$ das Laplace-Funktional von $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$.

(a) Für $f \in \mathcal{H}'$ definieren wir die Funktion $\varphi_f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ durch $\varphi_f(s) = \mathbf{L}(sf)$. Zeige, dass für die Ableitung φ'_f von φ_f gilt: $\varphi'_f(0) = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu(\mathrm{d}x)$, wobei μ das zu $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ korrespondierende Intensitätsmaß ist.

(b) Sei nun $\{\Lambda'_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein weiteres zufälliges Maß, das unabhängig von $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ist. Es bezeichne $\mathbf{L}'$ das Laplace-Funktional von $\{\Lambda'_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$. Ferner sei $\mathbf{L}''$ das Laplace-Funktional des zufälligen Maßes $\{\Lambda_B + \Lambda'_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$. Zeige, dass für alle $f \in \mathcal{H}'$ gilt: $\mathbf{L}''(f) = \mathbf{L}(f)\mathbf{L}'(f)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Cox-Prozess in $\mathbb{R}^d$ mit zufälligem Intensitätsmaß $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$. Sei $\{N'_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d$ mit lokal-endlichem Intensitätsmaß μ, sodass $\mu(B) = \mathbb{E}\,\Lambda_B$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt. Zeige $\operatorname{Var} N_B \geq \operatorname{Var} N'_B$ für alle $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$. Zeige ferner, dass für gegebenes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ genau dann Gleichheit gilt, wenn Λ_B f.s. konstant ist.

Aufgabe 3 (1 Punkt)
Sei $\{S_n, n \geq 1\}$ ein stationärer Punktprozess in $\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 1$. Bezeichne $\mathbb{N}_0$ die Menge aller Zählmaße $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \{0,1,\ldots\} \cup \{\infty\}$ in $\mathbb{R}^d$ mit $\varphi(\{x\}) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Sei $\phi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{N}_0 \to [0,\infty]$ eine Abbildung, sodass $\phi(B,\cdot)$ für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ eine $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-messbare Abbildung ist und zusätzlich gilt

1. $\phi(B+y, \{S_n, n \geq 1\}) \stackrel{D}{=} \phi(B, \{S_n - y, n \geq 1\})$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und alle $y \in \mathbb{R}^d$ und
2. $\phi(B, \{S_n, n \geq 1\}) \stackrel{D}{=} \phi(B, \{S'_n, n \geq 1\})$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und alle Punktprozesse $\{S'_n, n \geq 1\}$ mit $\{S_n, n \geq 1\} \stackrel{D}{=} \{S'_n, n \geq 1\}$.

Sei $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein zufälliges Maß mit

$$\Lambda_B \stackrel{D}{=} \phi(B, \{S_n, n \geq 1\}).$$

Zeige, dass $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ stationär ist.

Aufgabe 4 (2 + 3 + 4 + 3 Punkte)
Sei $\{S_n, n \geq 1\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda_0 > 0$. Sei $\lambda^{(1)} : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, \infty)$ eine Borel-messbare Funktion mit $\int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x)\mathrm{d}x < \infty$. Sei nun $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Cox-Prozess, dessen zufälliges Intensitätsfeld $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ durch

$$\lambda_x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(1)}(x - S_n)$$

gegeben ist.

(a) Zeige, dass $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ stationär ist.

(b) Zeige $\mathbb{E}\, N_B = \lambda_0 \nu_d(B) \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x)\mathrm{d}x$.

Sei nun $d = 2$ und $\lambda_1(x) = (1 - c\|x\|)\mathbb{1}(c\|x\| \leq 1)$ für ein $c > 0$.

(c) Berechne $\mathbb{E}\, N_B$ und zeige
$$\operatorname{Var} N_{[0,1]^2} \leq \lambda_0 \frac{3c^2\pi + \pi^2}{9c^4}.$$

(d) Sei $\lambda_0 = 20$ und $c = 4$. Schreibe ein Programm zur Simulation des Cox-Prozesses $\{N_B, B \in \mathbb{R}^d\}$ auf dem Beobachtungsfenster $W = [0,1]^2$ mit R oder Matlab. Erstelle einen Plot einer Realisierung. Achte bei der Simulation darauf, dass keine Randeffekte auftreten.