ulm university universität ulm

Stochastik I - Anleitung zu Übungsblatt 11

Hinweis zu den Aufgaben 3 und 4:

Um die Vollständigkeit der Schätzer zu zeigen ist das folgende Lemma hilfreich:

Lemma 1. *Seien μ_1 und μ_2 zwei σ-endliche Maße über $(\mathbb{R},\ \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, die entweder beide diskret oder beide absolutstetig sind. Sei weiter $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Falls die Integrale*

$$I_j(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} \mu_j(dx), \quad j = 1, 2$$

für alle $\theta \in \Theta$ existieren (und endlich sind) und falls $I_1(\theta) = I_2(\theta)$ für jedes $\theta \in \Theta$, dann gilt $\mu_1 = \mu_2$.

Verwende Bemerkung 3.5.5., 2.) (falls nötig) und gehe nach folgender Strategie vor:

1.) Sei g eine messbare Funktion mit $\mathbb{E}_\theta |g(\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n))| < \infty$ und $\mathbb{E}_\theta g(\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)) = 0$, für alle $\theta \in \Theta$. Schreibe $g = g^+ - g^-$ mit $g^+ = \max\{0, g\}$ und $g^- = \max\{0, -g\}$

2.) Mit $I_1(\theta) = \mathbb{E}_\theta g^+(\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n))$ und $I_2(\theta) = \mathbb{E}_\theta g^-(\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n))$ gilt

$$0 = \mathbb{E}_\theta g(\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)) = I_1(\theta) - I_2(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad I_1(\theta) = I_2(\theta),$$

für alle $\theta \in \Theta$.

3.) Finde nun σ-endliche Maße μ_1 und μ_2 so, dass I_1 und I_2 von der Gestalt wie in obigem Lemma sind. Beachte, dass der Integrand nicht zwingend $e^{\theta x}$ sein muss, sondern lediglich $e^{f(\theta)x}$ für eine geeignete Funktion f.

4.) Wende das Lemma an, um $g = 0$ (f.ü.) zu zeigen.